CAPíTULO 3

EDO Lineales de Orden n

1. Introducción

Definición 1.1. *Una EDO lineal de orden n es de la forma*

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y = 0 \quad (H)$$

o bien

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q} \quad (S)$$

A coeficientes constantes se tiene que $\forall i \in \{0, \ldots n-1\}, \overline{a}_i(x) = \overline{a}_i$ *en* $\mathbb{R}$.

Nos interesa encontrar la solución general, es decir, las condiciones de existencia, unicidad (bajo condiciones iniciales) y los métodos para encontrarla. Para la existencia y unicidad, se estudiara el problema de Cauchy, el cual consiste en encontrar la solución de una EDO lineal de orden n en un intervalo I no reducido a un punto, dado que para un cierto $x_0 \in I$, se conocen $y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$, es decir, se conocen las condiciones iniciales del problema. La idea es demostrar que para cualquier elemento de I y para cualquier elección de las condiciones iniciales, existe una única solución que satisface la EDO.

2. Matriz compañera

Se realiza el siguiente cambio de variables:

$$\begin{array}{rcl} z_1(x) & = & y(x) \\ z_2(x) & = & y'(x) \\ & \vdots & \\ z_n(x) & = & y^{(n-1)}(x) \end{array}$$

Derivando cada nueva variable, se tiene:

$$\begin{array}{lll} z_1'(x) & = y'(x) = & z_2(x) \\ z_2'(x) & = y''(x) = & z_3(x) \\ & \vdots & \\ z_n'(x) & = y^{(n)}(x) = & -\overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) - \cdots - \overline{a}_0(x)y(x) + \overline{Q} \\ & = & -\overline{a}_{n-1}(x)z_n(x) - \cdots - \overline{a}_0(x)z_1(x) + \overline{Q} \end{array}$$

Con esto, el sistema queda de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}'}_{z'(x)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\overline{a}_0(x) & -\overline{a}_1(x) & -\overline{a}_3(x) & \dots & -\overline{a}_{n-1}(x) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{A_c(x)} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}}_{z(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \overline{Q} \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

Si se tienen las condiciones iniciales, es decir, $y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ equivale a tener las condiciones iniciales en el sistema $z_1(x_0), \dots, z_n(x_0)$ y el problema se escribe

$$\begin{array}{rcl} z'(x) & = & A_c(x)z(x) + b(x) \\ z(x_0) & = & (y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0))^t \text{(condiciones iniciales)} \end{array}$$

con $x \in I$ intervalo no reducido a un punto. $A_c(x)$ se denomina *matriz compañera.*

3. Teorema de Existencia y Unicidad

El siguiente Teorema se demostrará en el Capítulo siguiente.

TEOREMA 3.1 (Existencia y Unicidad). *El problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \text{(S)} \quad y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q}(x), x \in I \\ \text{(C.I.)} \quad y(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) \ \textit{dados} \end{cases}$$

donde I es un intervalo real no reducido a un punto, las funciones $\overline{a}_i(x), \overline{Q}(x)$ son continuas en I (respectivamente continuas por pedazos en I), para cada $x_0 \in I$ y para cada vector de condiciones iniciales, se tiene una solución única $y(x)$ con $x \in I$ tal que $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ son continuas en I e $y^{(n)}$ es continua en I (respectivamente continua por pedazos en I).

OBSERVACIÓN. 1. Si $\overline{Q}(x) = 0$, $y(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, entonces $y \equiv 0$

2. Si y, z son soluciones de (S) y $y(x_0) = z(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0)$, entonces $y = z$.

4. Espacios $\mathcal{S}$ y $\mathcal{H}$

Vamos a estudiar la estructura de la solución general de (S). Para ello comenzamos con la homogénea:

$$y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y \;=\; 0$$

DEFINICIÓN 4.1. $\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y$ *es solución de (S)* $\}$

DEFINICIÓN 4.2. $\mathcal{H} = \{y \in \mathcal{C}^n(I) : y$ *es solución de (H)* $\}$

TEOREMA 4.1. *$\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$ de dimensión n.*

DEMOSTRACIÓN. Claramente $0 \in \mathcal{H}$. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$. Como $y_1^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y_1 = 0$, ponderando por $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $(\lambda y_1)^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)(\lambda y_1)^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)(\lambda y_1) = 0$, luego $\lambda y_1 \in \mathcal{H}$. Al sumar las evaluaciones de (H) en y_1 e y_2 se tiene que $(y_1^{(n)} + y_2^{(n)}) + \overline{a}_{n-1}(x)(y_1^{(n-1)} + y_2^{(n-1)}) + \cdots + \overline{a}_0(x)(y_1 + y_2) = 0$, lo que equivale a $(y_1 + y_2)^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)(y_1 + y_2) = 0$, por lo tanto $y_1 + y_2 \in \mathcal{H}$ y $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}^n(I)$.
Vamos a construir una base de $\mathcal{H}$, llamada *base canónica*, es decir, n funciones l.i. $y_1, \dots, y_n$ y que generan $\mathcal{H}$. Sea y_i una solucion de (H) con condiciones iniciales $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^t$ (solo 0 y un 1 en la posicion i-esima), es decir,

$$\begin{array}{rcl} y_i(x_0) & = & 0 \\ y_i'(x_0) & = & 0 \\ & \vdots & \\ y_i^{(i-1)}(x_0) & = & 1 \\ & \vdots & \\ y_i^{(n-1)}(x_0) & = & 0 \end{array}$$

Probemos que $\{y_1, \dots, y_n\}$ es l.i. : para todo $x \in I$ se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) & = & 0 \\ \alpha_1 y_1'(x) + \cdots + \alpha_n y_n'(x) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x) & = & 0 \end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \forall x \in I$$

Para $x = x_0$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con lo que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, por lo tanto son l.i.
Probemos que $\{y_1, \dots, y_n\}$ genera $\mathcal{H}$. Sea $y_h \in \mathcal{H}$. Demostremos que existen constantes $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ no todas nulas tales que para todo $x \in I$,

$$y_h(x) \;=\; \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \cdots + \beta_n y_n(x)$$

Derivando esa expresion hasta la (n-1)-esima derivada, se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x) \\ y_h'(x) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}, \forall x \in I$$

Evaluando en $x = x_0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_h(x_0) \\ y_h'(x_0) \\ \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}$$

Entonces $\beta_i = y_h^{(i-1)}(x_0)$. En principio los β_i dependen de x_0, hay que demostrar que no dependen. Sea $z_h \in \mathcal{H}$ tal que $z_h(x) = \beta_1 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) + \cdots + \beta_n y_n(x), \forall x \in I$. Como y_h, z_h son soluciones de (H) se tiene que

$$\begin{aligned} y_h(x_0) &= \beta_1 = & z_h(x_0) \\ y_h'(x_0) &= \beta_2 = & z_h'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_h^{(n-1)}(x_0) &= \beta_n = & z_h^{(n-1)}(x_0) \end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad, $y_h \equiv z_h$. □

Si x es un elemento y A un conjunto, recordemos la notación $x+A = \{x+a : a \in A\}$.

TEOREMA 4.2. *Si y_p es solución de (S) entonces $\mathcal{S} = y_p + \mathcal{H}$.*

Geométricamente quiere decir que $\mathcal{S}$ es un desplazamiento por el vector y_p de $\mathcal{H}$.

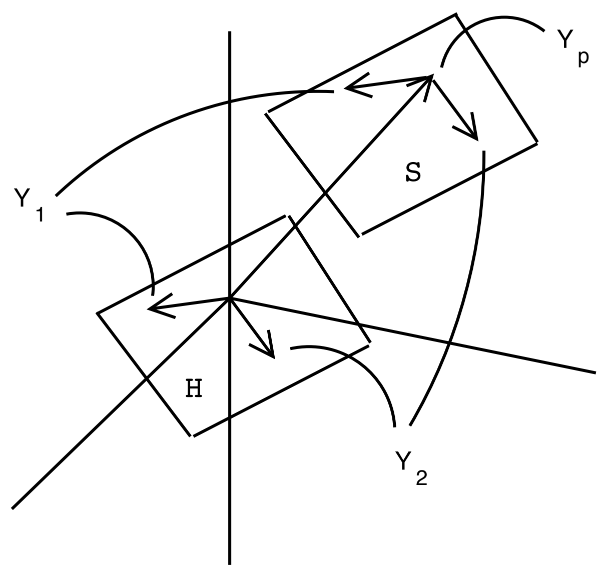

FIGURA 1. Representacion de los espacios $\mathcal{H}$ y $\mathcal{S}$ en 2 dimensiones sobre $\mathcal{C}^2(I)$.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a demostrar que toda solución de (S) se puede escribir como suma de y_p y una solución de (H). Sea y solucion de (S). Se tiene que $y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q}$ y que $y_p^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)y_p^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)y_p = \overline{Q}$. Si ambas expresiones se restan queda $(y-y_p)^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x)(y-y_p)^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x)(y-y_p) = 0$, por lo tanto $y - y_p \in \mathcal{H}$ y como $y = \underbrace{y_p}_{\in\mathcal{S}} + \underbrace{(y-y_p)}_{\in\mathcal{H}}$, se tiene el resultado. □

COROLARIO 4.1. *La solución general de $\mathcal{S}$ se escribe de la forma*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p$$

donde $y_1, \ldots, y_n$ son soluciones l.i. de (H), y_p es solcucion particular cualquier de (S) y las $C_i \in \mathbb{R}$ son constantes arbitrarias que dependeran de las n condiciones iniciales. (Las C_i no son los β_i calculados con anterioridad).

5. Wronskiano y Fórmula de Abel generalizados

DEFINICIÓN 5.1. *Dadas las funciones $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$, el Wronskiano asociado a esas funciones se define como*

$$W(x, y_1, \dots, y_n) \;=\; \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Notar que $W(x, y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}^1(I)$

LEMA 5.1.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}|A(x)| &= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vdots \\ i\text{-esima fila derivada} \\ \vdots \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \begin{vmatrix} \dots & j\text{-ésima columna derivada} & \dots \end{vmatrix} \end{aligned}$$

La demostración de este lema puede hacerse fácilmente por inducción o utilizando la definición de derivada $f'(x) = \lim_{h\to 0}(f(x+h) - f(x))/h$ y utilizando la linealidad por filas o columnas del determinante.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(x, y_1, \dots, y_n) &= \begin{vmatrix} y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1''(x) & \dots & y_n''(x) \\ y_1'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Si un determinante tiene 2 filas o 2 columnas iguales, su valor es 0, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
W' &= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ -\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a}_i(x) y_1^{(i)} & \dots & -\sum_{i=0}^{n-1} \overline{a}_i(x) y_n^{(i)} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Lema 5.2. *El determinante es multilineal por filas y columnas.*

Por ejemplo, si $det(A) = det(F_1, F_2, \dots, F_n)$, con F_i la fila i-esima de A, se tendria que $det(F_1, \dots, a + \lambda b, \dots, F_n) = det(F_1, \dots, a, \dots, F_n) + \lambda det(F_1, \dots, b, \dots, F_n)$.
Con este lema, la derivada del Wronskiano queda de la forma:

$$
\begin{aligned}
W' &= -\overline{a}_0(x) \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1(x) & \dots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=0} - \overline{a}_1(x) \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \end{vmatrix}}_{=0} - \dots \\
& \quad - \overline{a}_{n-1}(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \\
&= -\overline{a}_{n-1}(x) W
\end{aligned}
$$

Teorema 5.1 (Fórmula de Abel). *Si $W(x, y_1, \dots, y_n)$ esta formado por $y_1, \dots, y_n$ soluciones de (H), entonces*

$$W(x, y_1, \dots, y_n) = C \exp\left(-\int \overline{a}_{n-1}(x) dx\right)$$

con $C \in \mathbb{R}$.

Corolario 5.1. *El Wronskiano formado por n soluciones de (H) o bien se anula siempre o bien nunca (mayor o menor a cero).*

Teorema 5.2. *Sean $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{C}^n(I)$. Se tiene que:*

1. *Si* $W(x_0, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ *para algún* $x_o \in I$ *entonces* $y_1, \ldots, y_n$ *son l.i. en* $\mathcal{C}^n(I)$.
2. *Si* $W(x, y_1, \ldots, y_n) = 0$ *para todo* $x \in I$*, no implica que* $y_1, \ldots, y_n$ *sean l.d. en* $\mathcal{C}^n(I)$.
3. *Si* $y_1 \ldots, y_n$ *son soluciones de (H), las siguientes proposiciones son equivalentes:*
   a) $W(x_0, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ *para algún* $x_o \in I$.
   b) $W(x, y_1, \ldots, y_n) \neq 0$ *para todo* $x \in I$.
   c) $y_1, \ldots, y_n$ *son l.i.*

Demostración. 1. Propuesto.

2. Un contraejemplo es $y_1 = x^3$ e $y_2 = |y^3|$.
3. La equivalencia entre a) y b) es evidente gracias a la fórmula de Abel.
   La primera implicacia de la equivalencia entre b) y c) es clara gracias a la proposicion 1). Para la otra implicancia, probemos que si $W(x_0, y_1, \ldots, y_n) = 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces $y_1, \ldots, y_n$ son l.d.
   Como $W(x_0, y_1, \ldots, y_n) = 0$ para algún $x_0 \in I$, se tiene que existen $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que
$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Definiendo $z(x) = \alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x)$, se tiene que
$$\begin{aligned} z(x_0) &= \alpha_1 y_1(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = & 0 \\ z'(x_0) &= \alpha_1 y_1'(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n'(x_0) = & 0 \\ &\vdots \\ z^{(n-1)}(x_0) &= \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = & 0 \end{aligned}$$
   Como $z \in \mathcal{H}$, por el teorema de existencia y unicidad, se tiene que $z(x) = 0$ para todo $x \in I$, luego existen $\alpha_1 \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ no todos nulos tales que $\alpha_1 y_1(x) + \cdots + \alpha_n y_n(x) = 0$ para todo $x \in I$.

□

6. EDO de Orden n a Coeficientes Variables

- Soluciones Homogéneas:
  Deben ser n soluciones l.i. . No hay un método general para encontrarlas. Lo único que podemos decir es que conociendo

$n-1$ de ellas l.i. , se puede calcular una más l.i. usando la fórmula de Abel (si $n=2$ fórmula de Liouville).

- Soluciones Particulares:
  Si conocemos a priori $y_1, \ldots, y_n$ n soluciones l.i. de (H) , $y_p = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$ (variación de parámetros). Para simplificar definimos el operador lineal:

$$Ly = y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0(x) y$$

Con esta notación se tiene

$$\begin{aligned} Ly_i &= 0 \text{ (H)} \\ Ly_p &= \overline{Q} \text{ (S)} \end{aligned}$$

Si imponemos

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i' = \cdots = \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)} = 0,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} y_p &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i \\ y_p' &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i}_{=0} \\ y_p'' &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'}_{=0} \\ &\vdots \\ y_p^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}}_{=0} \\ y_p^{(n)} &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} \end{aligned}$$

Ponderando la ecuación correspondiente a la i-ésima derivada de y_p por $\overline{a}_i(x)$ para $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ y sumando hacia abajo, se tiene que

$$Ly_p = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i(x) L y_i}_{=0(Ly_i=0)} + \textstyle\sum_{i=1}^{n} C_i' y_i^{(n-1)} = \overline{Q}$$

Matricialmente el sistema obtenido es:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ \vdots \\ C_{n-1}' \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \overline{Q} \end{pmatrix}$$

De la regla de Cramer, se sabe que $C_i'(x) = \dfrac{W_i(x, y_1, \dots, y_n)}{W(x, y_1, \dots, y_n)}$, donde W_i corresponde a W con la i-ésima columna cambiada por $(0, \dots, 0, \overline{Q})^t$, por lo tanto

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(s, y_1, \dots, y_n)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} ds$$

Los $C_i(x)$ son únicos pues como $y_1, \dots, y_n$ son l.i. , $W(x, y_1, \dots, y_n) \neq 0$.

6.1. Formula de Green.

$$\begin{aligned} y_p &= \sum_{i=1}^{n} y_i(x) C_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i(x) \int \frac{W_i(s, y_1, \dots, y_n)}{W(s, y_1, \dots, y_n)} ds \\ &= \int \frac{1}{W(s, y_1, \dots, y_n)} \sum_{i=1}^{n} y_i(x) W_i(s, y_1, \dots, y_n) ds \end{aligned}$$

Podemos escribir $W_i(s, y_1, \dots, y_n) = (-1)^{n+i}\overline{Q}(s)\tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n)$, donde $\tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n)$ es igual a $W(s, y_1, \dots, y_n)$ sin la n-ésima fila y sin la i-esima columna, es decir,

$$\tilde{W}_i(s, y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_{i-1}(s) & y_{i+1}(s) & \dots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_{i-1}^{(n-2)}(s) & y_{i+1}^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \end{vmatrix}$$

Con esto queda

$$\begin{aligned} y_p &= \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s,y_1,\ldots,y_n)} \sum_{i=1}^{n} y_i(x)(-1)^{n+i}\tilde{W}_i(s,y_1,\ldots,y_n)ds \\ &= \int \frac{\overline{Q}(s)}{W(s,y_1,\ldots,y_n)} \underbrace{\begin{vmatrix} y_1(s) & \ldots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \ldots & y_n'(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \ldots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(x) & \ldots & y_n(x) \end{vmatrix}}_{=R(x,s)} \end{aligned}$$

Definiendo la Función de Green como $G(x,s) = \dfrac{R(x,s)}{W(s,y_1,\ldots,y_n)}$, se tiene que

Teorema 6.1 (Teorema de representación de Green).

$$y_p = \int G(x,s)\overline{Q}(s)ds.$$

7. EDO de Orden n a Coeficientes Constantes

7.1. Solución Homogénea. La EDO $y^{(n)} + \overline{a}_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + \overline{a}_0 y = 0$ se escribirá de la forma $P(D)y = 0$, donde $P(D)$ es el operador diferencial $P(D) = D^n + \overline{a}_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 D + \overline{a}_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{a}_i D^i$, con $\overline{a}_n = 1$.

$P(D)$ esta asociado al polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^n + \overline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1\lambda + \overline{a}_0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como se trata de un polinomio de grado n, tendrá n raices o valores caracteristicos: $p(\lambda_i) = 0, \lambda_i \in \mathbb{C}$ raices. Como $\overline{a}_i \in \mathbb{R}$, si hay raices complejas, etas apareceran en pares conjugados.

Supondremos que hay l raices distintas con multiplicidades algebraicas m_i resprectivamente. El polinomio se puede descomponer de la forma:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\ldots(\lambda-\lambda_l)^{m_l} \\ &= \prod_{i=1}^{l}(\lambda-\lambda_i)^{m_i} \end{aligned}$$

con $n = \sum_{i=1}^{l} m_i$.

Es fácil probar que la factorización de $p(\lambda)$ induce una análoga en $P(D)$, donde el producto corresponde a una composición:

$$P(D) = \underbrace{(D-\lambda_1)\circ\cdots\circ(D-\lambda_1)}_{m_1 \text{ veces}} \circ\cdots\circ \underbrace{(D-\lambda_l)\circ\cdots\circ(D-\lambda_l)}_{m_l \text{ veces}}$$

Lo primero que se aprecia es que

$$P(D)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-\lambda_1)^{m_1} \circ \ldots (D-\lambda_l)^{m_l} y = 0$$

Se pueden definir nuevas variables z_i de la forma:

$$(D-\lambda_1) \circ \underbrace{(D-\lambda_1) \circ \cdots \circ \underbrace{(D-\lambda_l) \circ \underbrace{(D-\lambda_l)y}_{z_{n-1}}}_{z_{n-2}}}_{z_1} \;=\; 0$$

Lo que genera un sistema en cascada de n EDO's lineales de orden 1:

$$\begin{aligned}
(D-\lambda_1)z_1 &= 0\\
(D-\lambda_1)z_2 &= z_1\\
&\vdots\\
(D-\lambda_1)z_{m_1} &= z_{m_1-1}\\
&\vdots\\
(D-\lambda_l)y &= z_{n-1}
\end{aligned}$$

En principio es un método válido para resolver la EDO (incluso la no-homogénea) pero es solo útil como concepto.

PROPIEDADES 7.1. *(Traslación)*

1. $P(D+\lambda)1 = p(\lambda)$
2. $P(D)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}P(D+\lambda) = e^{\lambda x}p(\lambda)$
3. $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}P(D+\lambda)f(x)$

DEMOSTRACIÓN.

1. Recordemos que
$$(D+\lambda)^k f(x) = \underbrace{(D+\lambda)\ldots(D+\lambda)}_{k \text{ veces}} f(x) = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} f^{(i)}(x)\lambda^{k-i},$$
luego, si $f(x) = 1$, para todo $i > 0$, $f^{(i)}(x) = 0$, con lo que se obtiene $(D+\lambda)^k 1 = \lambda^k$, por lo tanto $P(D+\lambda)1 = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \overline{a}_i \lambda^i = p(\lambda)$.
2. De 1) y 3) con $f(x) = 1$ se tiene el resultado.
3. Se sabe que $D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} D^k(f(x))D^{j-k}(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}\sum_{k=0}^{j} \begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix} D^k(f(x))\lambda^{j-k} = e^{\lambda x}(D+\lambda)^j f(x)$.
Ahora, $P(D)(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j D^j(f(x)e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^{n} \left[\overline{a}_j e^{\lambda x}(D+\lambda)^j f(x)\right] = e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{n} \overline{a}_j (D+\lambda)^j f(x) = e^{\lambda x}P(D+\lambda)f(x)$.

$\square$

Con ayuda de la propiedad 2) se pueden encontrar l soluciones de la ecuación homogénea. Si λ_i es una raíz del polinomio $p(\lambda)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} P(D)e^{\lambda_i x} &= e^{\lambda_i x}\underbrace{p(\lambda_i)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Lo que quiere decir que $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_l x}$ son soluciones de (H). Veamos que son l.i.:

$$\begin{aligned} W(x, e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_l x}) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & \dots & e^{\lambda_l x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l e^{\lambda_l x} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} e^{\lambda_1 x} & \dots & \lambda_l^{l-1} e^{\lambda_l x} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x\right) \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_l \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{l-1} & \dots & \lambda_l^{l-1} \end{vmatrix} \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i x\right) C \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j) \end{aligned}$$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, el Wronskiano es distinto de cero y las funciones son l.i.

Para formar la base necesitamos n funciones l.i., por lo tanto hay que encontrar $n - l$ más. De la propiedad 3), se tiene que (λ_i es una raíz del polinomio $p(\lambda)$):

$$\begin{aligned} P(D)(x^k e^{\lambda_i x}) &= e^{\lambda_i x} P(D + \lambda_i) x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_i - \lambda_i)^{m_i} \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} x^k \\ &= (D - \lambda_1 + \lambda_i)^{m_1} \dots (D - \lambda_{i-1} - \lambda_i)^{m_{i-1}} (D - \lambda_{i+1} - \lambda_i)^{m_{i+1}} \\ &\quad \dots (D - \lambda_l - \lambda_i)^{m_l} D^{m_i} x^k \end{aligned}$$

Como $D^{m_i} x^k = 0 \Leftrightarrow 1 \leq k \leq m_i - 1$, se encuentran $m_i - 1$ soluciones de (H):

$$x e^{\lambda_i x}, x^2 e^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x}$$

Repitiendo este procedimiento para cada m_i, se encuentran $n - l$ soluciones, ya que $\sum_{i=1}^{l} (m_i - 1) = \sum_{i=1}^{l} m_i - l = n - l$.

Ejemplo 7.1.

$$(D - 1)^2 (D + 3)^5 D^3 y = 0$$

En este caso $n = 10$. Veamos todas las soluciones que se encuentran con este método:

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 = 1, m_1 = 2 & \Rightarrow & \{e^x, xe^x\} \\ \lambda_2 = -3, m_2 = 5 & \Rightarrow & \{e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}\} \\ \lambda_3 = 0, m_3 = 3 & \Rightarrow & \{1, x, x^2\} \end{array}$$

Veamos si son l.i. Para todo $x \in I$ se debe cumplir:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{1,1}e^x + \alpha_{1,2}xe^x + & & \\ \alpha_{2,1}e^{-3x} + \alpha_{2,2}xe^{-3x} + \alpha_{3,1}x^2e^{-3x} + \alpha_{4,1}x^3e^{-3x} + \alpha_{5,1}x^4e^{-3x} + & & \\ \alpha_{3,1} + \alpha_{3,2}x + \alpha_{3,3}x^2 & = & 0 \end{array}$$

Aplicando $(D-1)^3(D+3)^5D^2$ a esta expresión, se transforma en

$$2\alpha_{3,3} = 0$$

Aplicando $(D-1)^3(D+3)^5D$, se obtiene

$$\alpha_{3,2} = 0$$

Y sucesivamente, se obtiene que $\alpha_{i,j_i} = 0$ para todo $i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2,3,4,5\}$, por lo tanto, son l.i.

En general, las n soluciones encontradas son l.i., pues dada la ecuación

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{1,1}e^{\lambda_1 x} + \cdots + \alpha_{1,m_1}x^{m_1-1}e^{\lambda_1 x} + & & \\ \alpha_{2,1}e^{\lambda_2 x} + \cdots + \alpha_{2,m_2}x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x} + & & \\ \vdots & & \\ \alpha_{l,1}e^{\lambda_l x} + \cdots + \alpha_{l,m_l}x^{m_l-1}e^{\lambda_l x} & = & 0 \end{array}$$

Al aplicar el operador $(D-\lambda_1)^{m_1} \ldots (D-\lambda_i)^{m_i-1} \ldots (D-\lambda_l)^{m_l}$, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \alpha_{i,m_i-1}(D-\lambda_1)^{m_1} \ldots (D-\lambda_l)^{m_l}(D-\lambda_i)^{m_i-1}(x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}) & = & 0 \\ e^{\lambda_i x}\alpha_{i,m_i-1}\underbrace{(D-\lambda_1+\lambda_i)^{m_1} \ldots (D-\lambda_l+\lambda_i)^{m_l}}_{\tilde{p}(\lambda_i)}\underbrace{D^{m_i-1}x^{m_i-1}}_{(m_i-1)!} & = & 0 \\ e^{\lambda_i x}\alpha_{i,m_i-1}(m_i-1)!\tilde{p}(\lambda_i) & = & 0 \end{array}$$

Se verifica que $\tilde{p}(\lambda_i) \neq 0$ y $(m_i-1)! \neq 0$, por lo tanto $\alpha_{i,m_i-1} = 0$. Repitiendo la aplicacion progresivamente, se verifica que todos los α_{i,m_i-1} son iguales a cero, con lo cual las n funciones son l.i..

Ejemplo 7.2.

$$(D-(1+i))^3(D-(1-i))^3y=0$$

$n=6$:

$$\begin{aligned}\lambda_1=1+i, m_1=3 &\Rightarrow \{e^{(1+i)x}, xe^{(1+i)x}, x^2e^{(1+i)x}\}\\ \lambda_2=-3, m_2=5 &\Rightarrow \{e^{(1-i)x}, xe^{(1-i)x}, x^2e^{(1-i)x}\}\end{aligned}$$

Si $\{b_1, b_2 \dots, b_n\}$ es una base, entonces $\{b_1-b_2, b_1+b_2, b_3, \dots, b_n\}$ también es una base, luego, sumando y restando cada‘par de soluciones correspondientes (es decir, $e^{(1+i)x}+e^{(1-i)x}=e^x\cos x$ y $e^{(1+i)x}-e^{(1-i)x}=ie^x \operatorname{sen} x$), se obtiene una base real de la forma

$$\{e^x\cos x, xe^x\cos x, x^2e^x\cos x, e^x\operatorname{sen} x, xe^x\operatorname{sen} x, x^2e^x\operatorname{sen} x\}$$

Este ultimo ejemplo permite generalizar la noción de la base obtenida. El siguiente teorema engloba lo estudiado en esta parte:

Teorema 7.1. *La ecuación homogénea*

$$(D-\lambda_1)^{m_1}\dots(D-\lambda_l)^{m_l}y=0$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *soluciones de* $p(\lambda)=0$ *(valores característicos), tiene por soluciones combinaciones lineales de la base*

$$\{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}\}$$

para cada $\lambda_i\in\mathbb{R}$*, unida con*

$$\{e^{\sigma_j x}\cos w_jx, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x}\cos w_jx\}\bigcup\{e^{\sigma_j x}\operatorname{sen} w_jx, \dots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x}\operatorname{sen} w_jx\}$$

para cada $\lambda_j=\sigma_j\pm iw_j$ *(complejos conjugados).*

7.2. Solución Particular. Si se tiene la EDO

$$P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x}$$

con $\lambda_0\in\mathbb{C}$ y $q_{k_0}e^{\lambda_0 x}$ una funcion que puede ser un polinomio por una exponencial, un polinomio por seno o coseno por una exponencial o cualquier combinación lineal de estos, donde $gr(q_{k_0})\leq k_0$ en caso de ser un polinomio. Estas formas especiales se deben a los tipos de forzamientos que aparecen en la naturaleza.

El operador diferencial que anula el lado derecho es $(D-\lambda_0)^{k_0+1}$, pues

$$\begin{aligned}(D-\lambda_0)^{k_0+1}P(D)y &= (D-\lambda_0)^{k_0+1}q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x}\\ &= e^{\lambda_0 x}D^{k_0+1}q_{k_0}(x)\\ &= 0\end{aligned}$$

Si $\lambda_0\in\mathbb{R}$, la ecuación se transforma una homogénea de orden $n+k_0+1$ que sabemos resolver.

Si $\lambda_0\in\mathbb{C}$, se aplica además el operador $(D-\overline{\lambda}_0)^{k_0+1}$ a ambos lados de la ecuación, con lo que se obtiene $(D-\overline{\lambda}_0)^{k_0+1}(D-\lambda_0)^{k_0+1}P(D)y=0$, que es una homogénea de orden $n+2(k_0+1)$. Hay dos casos que se estudiarán:

7.2.1. Caso no resonante. $\lambda_0 \neq \lambda_j$ para todo $j \in \{1,\ldots,l\}$

1. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} &\Rightarrow y = y_h + y_p \\ (D-\lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{aligned}$$

La idea es obtener y_p comparando $\tilde{y}_h$ e y_h, más precisamente, como combinación lineal de aquellas funciones que aparezcan en $\tilde{y}_h$ y que sean l.i. con las que aparezcan en y_h.
Se sabe que y_h es combinacion linel de funciones pertenecientes a

$$\begin{aligned} M &= \bigcup_{\lambda_i \in \mathbb{R}} \{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}\} \cup \\ & \bigcup_{\lambda_j=\sigma_j \pm i w_j} \{e^{\sigma_j x}\cos w_j x, \ldots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x}\cos w_j x\} \cup \\ & \{e^{\sigma_j x}\operatorname{sen} w_j x, \ldots, x^{m_j-1}e^{\sigma_j x}\operatorname{sen} w_j x\} \end{aligned}$$

E $\tilde{y}_h$ es combinacion lineal de elementos pertenecientes a

$$\tilde{M} = M \cup \left\{e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{k_0}e^{\lambda_0 x}\right\}$$

Luego, $y_p = (A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$, con A_i constantes en $\mathbb{R}$ a determinar.
Reemplazando y_p en $P(D)y$:

$$\begin{aligned} P(D)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x} &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ e^{\lambda_0 x}P(D+\lambda_0)(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0}) &= q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} \\ r_{k_0}(x) &= q_{k_0}(x), \end{aligned}$$

donde $r_{k_0}(x)$ es un polinomio cuyos coeficientes dependen de A_i para $i \in \{0,\ldots,k_0\}$. Igualando coeficientes se obtiene un sistema lineal de $(k_0+1)\times(k_0+1)$, de donde se calculan los coeficientes.

Ejemplo 7.3.

$$(D-1)(D-2)y = xe^{3x}$$

Se sabe que $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$, para $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Con esto, se deduce que $y_p = (A_0 + xA_1)e^{3x}$, $y_p' = A_1e^{3x} + 3(A_0 +$

$A_1x)e^{3x} = (A_1+3A_0+A_1x)e^{3x}$ y $y_p'' = (6A_1+9A_0+9A_1x)e^{3x}$. Con esto, la EDO evaluada en y_p es de la forma:

$$\begin{aligned}(D^2-3D+2)y_p &= xe^{3x}\\ y_p''-3y_p'+2y_p &= xe^{3x}\\ (6A_1+9A_0+9A_1x-3A_1-9A_0-9A_1x+2A_0+2A_1x)e^{3x} &= xe^{3x}\\ 3A_1+2A_0+2A_1x &= x\end{aligned}$$

Lo que implica que $A_0 = \frac{-3}{4}$ y $A_1 = \frac{1}{2}$ y por lo tanto $y_p = (\frac{1}{2} - \frac{3}{4}x)e^{3x}$.

2. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} &\Rightarrow y = y_h + y_p\\ (D-\overline{\lambda}_0)^{k_0+1}(D-\lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 &\Rightarrow \tilde{y} = \tilde{y}_h\end{aligned}$$

Comparando y_h con $\tilde{y}_h$, se tiene que

$$\begin{aligned}y_p &= (A_0 + A_1x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x}\cos w_0x +\\ &\quad (B_0 + B_1x + \cdots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma x}\operatorname{sen} w_0x\end{aligned}$$

Al reemplazar y_p en la EDO se obtienen $2k_0+2$ ecuaciones.

Ejemplo 7.4.

$$(D-1)(D-2)y = xe^{3x}\cos x$$

En este caso $\lambda_0 = 3 \pm i$, y la solución homogénea es $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$, luego

$$\begin{aligned}y_p &= (A_0+A_1x)e^{3x}\cos x + (B_0+B_1x)e^{3x}\operatorname{sen} x\\ y_p' &= (\tilde{A}_0+\tilde{A}_1x)e^{3x}\cos x + (\tilde{B}_0+\tilde{B}_1x)e^{3x}\operatorname{sen} x \text{ (verificar)}\\ y_p'' &= (\tilde{\tilde{A}}_0+\tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x}\cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0+\tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x}\operatorname{sen} x \text{ (verificar)}\end{aligned}$$

donde $\tilde{A}_0, \tilde{B}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B}_1, \tilde{\tilde{A}}_0, \tilde{\tilde{B}}_0, \tilde{\tilde{A}}_1, \tilde{\tilde{B}}_1$ estan en funcion de A_0, B_0, A_1, B_1. Reemplazando y_p en la EDO, se tiene que

$$(\tilde{\tilde{A}}_0+\tilde{\tilde{A}}_1x)e^{3x}\cos x + (\tilde{\tilde{B}}_0+\tilde{\tilde{B}}_1x)e^{3x}\operatorname{sen} x = xe^{3x}\cos x$$

De donde se deduce que $\tilde{\tilde{A}}_0 = 0, \tilde{\tilde{A}}_1 = 1, \tilde{\tilde{B}}_0 = 0$ y $\tilde{\tilde{B}}_1 = 0$, lo que permite encontrar A_0, B_0, A_1 y B_1.

7.2.2. Caso resonante. $\lambda_0 = \lambda_j$ para algún $j \in \{1, \ldots, l\}$

1. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} P(D)y = q_{k_0}(x)e^{\lambda_0 x} & \Rightarrow & y = y_h + y_p \\ (D-\lambda_0)^{k_0+1}P(D)\tilde{y} = 0 & \Rightarrow & \tilde{y} = \tilde{y}_h \end{array}$$

La segunda ecuación se puede escribir de la forma

$$(D-\lambda_1)^{m_1}\ldots(D-\lambda_0)^{m_0+k_0+1}\ldots(D-\lambda_l)^{m_l}\tilde{y} \;=\; 0$$

Es decir, λ_0 aumento su multiplicidad, luego, comparando $\tilde{y}_h$ e y_h, se tiene que y_p es combinación lineal de elementos de $\{x^{m_0}e^{\lambda_0 x}, x^{m_0+1}e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m_0+k_0}e^{\lambda_0 x}\}$, es decir,

$$y_p \;=\; x^{m_0}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\lambda_0 x}$$

Al factor x^{m_0} se le llama *factor de resonancia*.

2. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ Repitiendo el proceso, se observa que y_p es de la forma

$$\begin{array}{rcl} y_p & = & x^{m_0}(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x}\cos w_0 x \\ & & +x^{m_0}(B_0 + B_1 x + \cdots + B_{k_0}x^{k_0})e^{\sigma_0 x}\operatorname{sen} w_0 x. \end{array}$$