U. DE CHILE

INGENIERIA

Departamento de Ingeniería Matemática. FCFM-U. de Chile.

MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guía #2

Semestre 2007-2. Prof.: A. Osses, Auxs: N. Carreño, J. Lemus

El objetivo de esta segunda guía docente del curso es recopilar ejercicios, problemas de control y de modelamiento que involucran EDO's lineales de segundo orden y de orden n.

Ejercicios:

1. Hallar la solución general de las ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' - 16y = 0 & (b) & y'' + 9y = 0 \\ (c) & \frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0 & (d) & y'' - 4y' + 5y = 0 \\ (e) & 3y'' + 2y' + y = 0 & (f) & y'' + 6y' + 9y = 0 \\ (g) & y'' + 3y' - 5y = 0 & (h) & 12y'' - 5y' - 2y = 0 \end{array}$$

2. Resolver los siguientes problemas de valor inicial.

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' + 16y = 0 & y(0) = 2 & y'(0) = -2 \\ (b) & y'' + 6y' + 5y = 0 & y(0) = 0 & y'(0) = 3 \\ (c) & 2y'' - 2xy' + y = 0 & y(0) = -1 & y'(0) = -2 \\ (d) & y'' - 3y' + 2y = 0 & y(1) = 0 & y'(1) = 1 \\ (e) & y'' - y = 0 & y(0) = 1 & y'(0) = 1 \\ (f) & y'' - 8y' + 17y = 0 & y(0) = 4 & y'(0) = -1 \end{array}$$

3. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales por el método de variación de parámetros.

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' + y = tg(x) & (b) & y'' + y = sen(x) \\ (c) & y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x} & (d) & y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x) \\ (e) & y'' + 3y' + 2y = 4e^x & (f) & y'' + 3y' + 2y = sen(x) \\ (g) & y'' - 2y' + 2y = e^x sec(x) & (h) & y'' - 4y = xe^x \\ (i) & y'' - 2y' + y = e^x/(1 - x)^2 & (j) & y'' + y = cos^2(x) \end{array}$$

4. Resolver cada ecuación diferencial por el método de variación de parámetros, sujeta a las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$\begin{array}{llll} (a) & y'' - y = xe^x & (b) & 2y'' + y' - y = x + 1 \\ (c) & y'' + 2y' - 8y = 2e^{-2x} - e^{-x} & (d) & y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x} \end{array}$$

5. Sea $y_1(x)$ una solución conocida de la Edo lineal $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
(a) Tomando $y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x)$, con $v(x)$ una función arbitraria a determinar, demuestre que se puede encontrar otra solución $y_2(x)$ de la ecuación anterior, y que tiene la forma:

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1(x)^2} e^{-\int p(x)dx} dx$$

(b) Demuestre que la solución $y_2(x)$ es l.i con $y_1(x)$

6. Para las siguientes EDO's, verificar que y_1 es solución, hallar la solución y_2, e indicar la forma de la solución general.

$$\begin{array}{ll}
(a) & y'' + 4y' = 0, \quad y_1 = 1 \\
(b) & y'' + 16y' = 0, \quad y_1 = cos(4x) \\
(c) & y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y_1 = e^{2x} \\
(d) & xy'' + y' = 0, \quad y_1 = ln(x) \\
(e) & x^2y'' - 7xy' + 16y = 0, \quad y_1 = x^4 \\
(f) & (1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0, \quad y_1 = x + 1 \\
(g) & x^2y'' - xy' + 2y = 0, \quad y_1 = xsen(ln(x)) \\
(h) & xy'' - (2 + x)y' = 0, \quad y_1 = 1 \\
(i) & (x^4 - x^2)y'' - (3x^3 - x)y' + 8y = 0, \quad y_1 = x^4 \\
(j) & xy'' + (2x - 1)y' - 2y = 0, \quad y_1 = e^{-2x} \quad (x > 0)
\end{array}$$

7. Resolver cada ecuación diferencial usando el método de coeficientes indeterminados.

$$\begin{array}{ll}
(a) & y'' + 3y' + 2y = 4x^2 \\
(b) & y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4sen(x) \\
(c) & y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}
\end{array}$$

8. Determine las soluciones homogéneas y la **forma** de la solución particular de las siguientes ecuaciones.

$$\begin{array}{ll}
(a) & y''' + y' = 4e^{-x} + 3xsen(x) \\
(b) & y'' + 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x sen(2x) + 3e^{-x}cos(x) + 4e^x
\end{array}$$

9. Encontrar la solución general de $y'' + 2y' + y = e^{-x}ln(x)$ con $x > 0$.

Problemas de Control:

1. Suponga que y_1 e y_2 son soluciones l.i. de la ecuación

$$y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0, \quad \forall t \in I\!R$$

y que a_0, a_1 son funciones continuas en $I\!R$.

   (i) Demuestre que y_1 e y_2 no pueden tener un mismo punto de inflexión, a menos que a_0 y a_1 se anulen simultáneamente en ese punto. Ind.: en un punto de inflexión la segunda derivada se anula.

   (ii) Pruebe que si a y b con $a < b$ son dos ceros consecutivos de y_1, entonces existe un punto $c \in]a, b[$ donde y_2 se anula. Ind.: Considere que el Wronskiano para y_1 e y_2 no cambia de signo. Use el Teorema del Valor Intermedio.

2. Sea $f(x)$ una función impar, si se tiene que $f(x) \in C^1] - a, a[$, $f(0) = 0$ y $f'(0) = 0$, se pide:
(a) Demuestre que $W(f(x), |f(x)|) \equiv 0 \quad \forall x \in] - a, a[$.
(b) Demuestre que $f(x)$ y $|f(x)|$ son l.i. en]-a,a[a menos que $f(x)$ sea identicamente nula.
(c) Lo anterior, ¿le parece una contradicción?, comente.

3. (a) Demuestre que

$$W(e^{k_1 x},\ldots,e^{k_n x}) = e^{(k_1+\ldots+k_n)x}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & \ldots & k_n \\ k_1^2 & \ldots & \ldots & k_n^2 \\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots \\ k_1^{n-1} & \ldots & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

(b) Demuestre que $W(e^{k_1 x},\ldots,e^{k_n x}) = 0$ *ssi* $\exists k_i = k_j$ para algún $i \neq j$

4. (C1-2000-1-Osses) *Ecuación tipo Euler.* La ecuación diferencial

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0$$

donde a, b y c son constantes reales, es llamada *ecuación de tipo Euler.* Tiene al menos una solución del tipo $y(x) = x^\lambda$.

(i) Deduzca que λ debe satisfacer

$$a\lambda(\lambda-1) + b\lambda + c = 0 \qquad (1)$$

Sean λ_1 y λ_2 las raíces de (1). En cada uno de los casos siguientes encuentre una base del espacio solución demostrando explícitamente la independencia lineal.

(ii) λ_1 y λ_2 son reales y distintas.

(iii) $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ y $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$ (HINT: $x^\gamma = e^{\gamma ln(x)}$).

(iv) $\lambda_1 = \lambda_2 = (a-b)/(2a)$.

5. Para $x > 0$, considere un operador diferencial lineal de orden n de la forma

$$P(xD) = \prod_{j=1}^{n}(xD - \lambda_j)$$

donde $\lambda_j \in I\!R, j = 1,\ldots,n$ son **todos diferentes** y por definición $(xD-\lambda_j)y = xy' - \lambda_j y$. Nuestro propósito es resolver la EDO homogénea:

$$P(xD)y = 0, \quad \text{con} \quad x > 0. \qquad (H)$$

(i) Demuestre que el orden de la composición en $P(xD)$ no importa. Para ello, demuestre que

$$(xD-\lambda_i)(xD-\lambda_j)y = (xD-\lambda_j)(xD-\lambda_i)y$$

(ii) Demuestre las propiedades de traslación siguientes:

$$(xD-\lambda)x^\beta f = x^\beta(xD-\lambda+\beta)f \qquad (PT1)$$

y en particular

$$(xD-\lambda)x^\beta = (\beta-\lambda)x^\beta \qquad (PT2)$$

(iii) A partir de lo anterior demuestre que x^{λ_j} es solución de (H) para $j = 1, \ldots, n$.

(iv) Demuestre ahora que $\{x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}\}$ es un conjunto de funciones linealmente independientes. Puede usar determinantes o comportamiento en el infinito. En caso de usar determinantes, sacando factores apropiados, use que el determinante siguiente es no nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1(\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_1 - (n-2)) & \ldots & \lambda_n(\lambda_n - 1)\ldots(\lambda_n - (n-2)) \end{vmatrix} \neq 0$$

(v) Demuestre que $< x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n} >$ genera el espacio solución de (H). Deduzca que (H) tiene como solución

$$y_h(x) = c_1 x^{\lambda_1} + c_2 x^{\lambda_2} + \ldots + c_n x^{\lambda_n} \quad \text{para} \quad x > 0$$

donde $c_j, j = 1, \ldots, n$ son constantes reales.

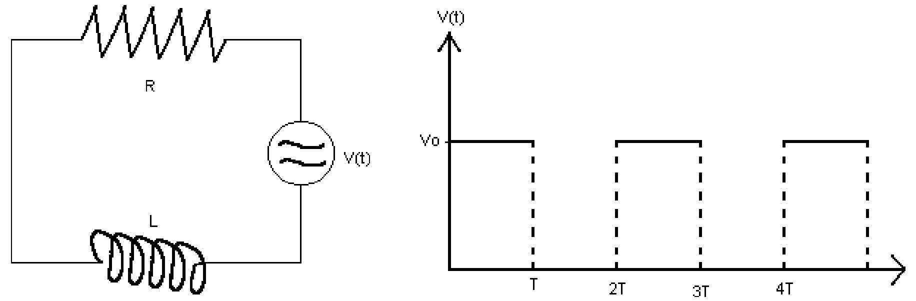
(vi) Usando sucesivamente las propiedades de traslación (PT1) y (PT2), resuelva la ecuación no homogénea siguiente:

$$(xD - 3)(xD - 4)(xD - 5)(x^2 y) = x^{3/2}, \quad \text{con} \quad x > 0.$$

Problemas de Modelamiento:

1. (C2-2001-2-Alvarez) *Onda cuadrada y dosis de glucosa.*

(a) Determine la corriente eléctrica en función del tiempo en un circuito en serie compuesto por una inductancia L, una resistencia R y una fuente de voltaje del tipo *onda cuadrada* de amplitud V_0 y período $2T$(ver figura). Asuma que inicialmente la corriente eléctrica es nula.



(b) La desviación $g(t)$ de la concentración de glucosa desde su nivel base N_b en un cuerpo humano puede modelarse por la EDO

$$\ddot{g} + 2\alpha\dot{g} + w_0^2 g = 0$$

donde $\alpha > 0$, $w_0 > 0$ y $g(0) = 0$, $\dot{g}(0) = \beta$ donde β es la tasa inicial(desconocida) de variación de glucosa.

(b.1) Determine $g(t)$ en términos de α, β y $w = \sqrt{w_0^2 - \alpha^2}$ (considere el caso $w_0 > \alpha$).

(b.2) Suponga que un paciente llega a un hospital con nivel base de glucosa igual a $0,7[mg/cm^3]$ y entonces se le suministra una fuerte dosis de glucosa. Al cabo de 1 hora, 2 horas y 3 horas se miden niveles de 1; $0,55$ y $0,75[mg/cm^3]$ respectivamente.
Verifique que si $\gamma = sen(w)$, entonces necesariamente $\gamma = \pm 1/2$.

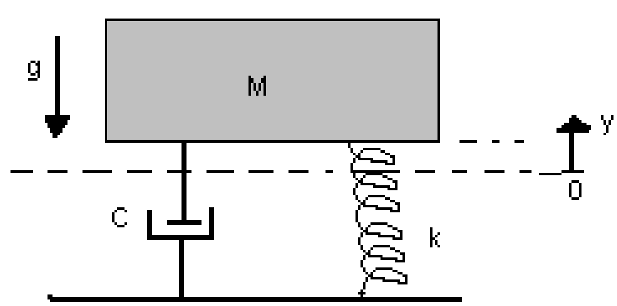
(b.3) (0,5 pts)Bajo las condiciones de (b.2), pruebe que para ese paciente se tiene $w = 5\pi/6$, $\alpha = \frac{1}{2}ln(12)$ y $\beta = \pi\sqrt{3}$

(b.4) (0,5 pts) Se sabe que los pacientes **no-diabéticos** tienen valores de w_0(que corresponde a la frecuencia de oscilaciones no-amortiguadas) de período máximo $4[hrs]$, mientras que los diversos grados de diabetes se atribuyen a pacientes con períodos mayores a $4[hrs]$.
Con la información anterior clasifique al paciente de (b.2).

2. *Oscilador.* El oscilador amortiguado que se muestra en la figura, se suelta a una altura "y_0" sobre la posición de equilibrio del resorte(sin la acción de la masa M) con velocidad nula. Si c es la constante de amortiguamiento del amortiguador, y k es la rigidez del resorte, de la segunda ley de Newton se puede deducir que la ecuación diferencial que rige el movimiento vertical de la masa M es

$$-cy' - ky - mg = my''$$

Encuentre la función que describe el movimiento de la masa M y grafique dicha función.



3. (ExRec-2001-01-Osses) Considere el sistema de dos estanques de igual sección transversal S, unidos por una tubería de sección A y largo L(ver figura). Inicialmente el nivel de los

estanques es el mismo y el sistema está en equilibrio. En el instante $t = 0$ comienza a descargarse en el estanque de la derecha un caudal $Q(t) = \alpha t$, con $\alpha > 0$ constante.
La ecuación diferencial que modela el sistema antes descrito cuando el el flujo que circula por la cañería es laminar es:

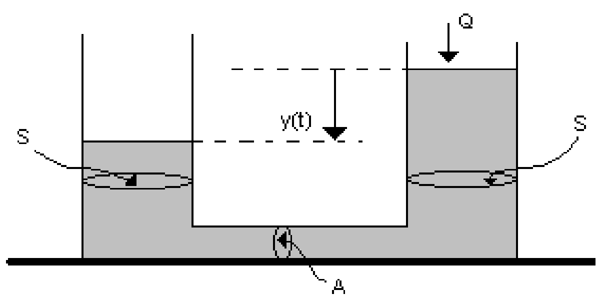
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = c + act \qquad \forall t \geq 0$$

$$y(0) = 0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Donde $y(t)$ es la diferencia de nivel de los estanques en el instante, $a = \frac{32\nu}{D^2} > 0$, $b = \frac{2Ag}{SL} > 0$, $c = \frac{\alpha}{S} > 0$, con $\nu =$ viscosidad cinemática del fluido.

(i) Encuentre $y(t)$ cuando no existen pérdidas friccionales en el sistema(ie,cuando $a = 0$, ya que $\nu = 0$).

(ii) Encuentre la solución general $y(t)$ cuando $a \neq 0$, analizando separadamente los casos $a^2 = 4b$, $a^2 > 4b$ y $a^2 < 4b$. Esquematice gráficamente la solución en cada caso en función de t.



4. (C1-2001-1-Osses) *Represa.* Motivados por los movimientos de un líquido que ocurren en la chimenea de una represa al cerrar una válvula (ver figura), estudiaremos el modelo simplificado del movimiento de un líquido incompresible en un tubo en U(ver Fig.2).

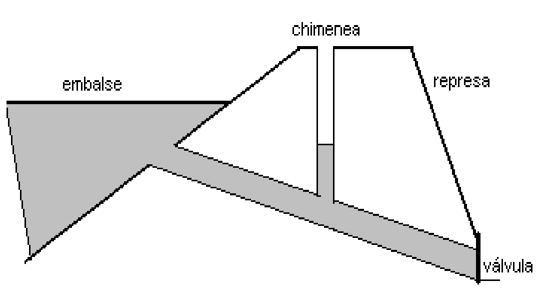


Fig. 1

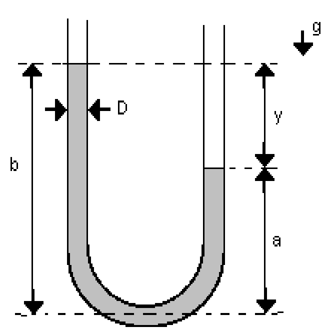


Fig. 2

La diferencia de altura y entre los extremos de la columna de líquido en forma de U, de diámetro $D > 0$, largo $L > 0$ y viscosidad $\nu \geq 0$ sujeta a una aceleración de gravedad $g \geq 0$, satisface:

$$y'' + ky' + wy = 0, \quad t \geq 0, \quad k = \frac{32\nu}{D^2}, w = \frac{2g}{L}.$$

Inicialmente $y(0) = b - a < \frac{L}{4}$, $y'(0) = -v_0$, $v_0 > 0$(ver Fig.2).

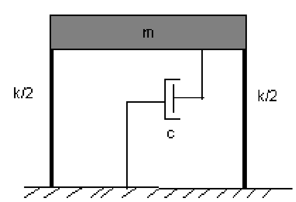
(i) Resuelva la ecuación con condiciones iniciales si $\nu = 0$ (ie, no hay fricción).

(ii) Si ahora $\nu \neq 0$, resuelva la ecuación con condiciones iniciales en los casos $k^2 > 4w$, $k^2 = 4w$, $k^2 < 4w$, discuta cualitativamente (graficando) las soluciones y dé una interpretación física haciendo uso de una analogía mecánica.

(iii) En el caso $k^2 < 4w$, encuentre una condición sobre v_0 en función de los parámetros del problema para evitar un rebalse, esto es:

$$|y(t)| \leq \frac{L}{4}$$

5. *Determinación de las propiedades dinámicas de una estructura de un grado de libertad (1 GDL).* Consideremos el siguiente modelo de una estructura de 1 GDL(una viga infinitamente rígida sustentada por dos columnas de rigidez horizontal $k/2$ cada una):



Haciendo un diagrama de cuerpo libre de la viga y utilizando la ecuación de equilibrio dinámico, se obtiene que la ecuación diferencial que rige el movimiento horizontal de la viga es:

$$u''(t) + 2\beta\omega_n u'(t) + \omega_n^2 u(t) = 0, \quad 2\beta\omega_n = \frac{c}{m}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}$$

donde : c=Constante de amortiguamiento, m=masa de la viga (concentrada en el centro de gravedad), k=rigidez horizontal total del sistema, ω_n= frecuencia natural con que vibra la estructura, ω_A= frecuencia amortiguada de la estructura, β= razón de amortiguamiento crítico.

(a) Encuentre la ecuación que describe el movimiento horizontal de la viga dadas las condiciones iniciales $u(t = 0) = U_0$ y $u'(t = 0) = U'_0$. (**Ind.:** empíricamente se sabe que para estructuras reales $0 < \beta << 1$).

(b) Prueba de Pullback: mediante algún método mecánico, se induce una deformación inicial estática U_0 sobre la estructura. Luego se libera a la estructura(del reposo),y se deja oscilar al sistema antes descrito registrándose la amplitud de las oscilaciones en un instrumento. Con la solución de la ecuación diferencial que rige el movimiento de la estructura se puede determinar la razón amortiguamiento crítico β y la frecuencia natural de las oscilaciones w_n usando los registros obtenidos. Para calcular β, pruebe haciendo el cuociente entre dos máximos sucesivos de la amplitud de las oscilaciones y obtenga una relación que permita obtener dicho coeficiente. Una vez que se obtiene β se puede obtener la frecuencia amortiguada $\omega_A = \omega_n\sqrt{1-\beta^2}$ midiento el período amortiguado de la estructura T_A, de donde se tiene que $\omega_A = \frac{2\pi}{T_A}$.

(c) Vibrador Dinámico Estructural: El vibrador estructural consiste en dos masas m_0 las cuales rotan con velocidad angular w en torno a dos ejes O' y O pero en direcciones contrarias y en fase, de tal manera que la proyección de las fuerzas centrífugas según $\hat{y}$(eje perpendicular a esta hoja) sean nulas y según $\hat{x}$(eje horizontal,paralelo a esta hoja) es $F(t) = 2m_0w^2rcos(wt)$, es decir en esta dirección se tiene una fuerza armónica. Con lo anterior se tiene que la Edo que modela el sistema cuando está actuando el vibrador es:

$$u''(t) + 2\beta\omega_n u'(t) + \omega_n^2 u(t) = F(t) = 2m_0w^2rcos(wt)$$

Resolver la ecuación diferencial que modela el movimiento de la estructura y proponer un método (usando mediciones experimentales de la amplitud de las oscilaciones de la estructura para una frecuencia de exitación dada) para deducir la frecuencia natural de oscilación de la estructura en cuestión. **HINT:** Aqui debe usar conceptos como el fenómeno de resonancia.

6. *Temperatura barra infinita.* La ecuación que modela la temperatura T en una barra infinita es

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad x \in]-\infty,\infty[\quad t \geq 0.$$

La idea de este problema es demostrar que la temperatura $T(x,t)$ tiende a cero en todo punto de la barra cuando $t \to \infty$, al menos en el caso particular en que $T(x,t) = f(x)g(t)$, donde f y g son funciones de una variable a determinar.

(i) Escriba la ecuación diferencial parcial en función de f, de g y sus derivadas.

(ii) Observe que si $A(X) = B(t) \quad \forall x,t$ entonces $\exists k \in I\!R$ tal que $A = B = k$. Use esto para encontrar EDO's para f y g separadamente en función del parámetro k.

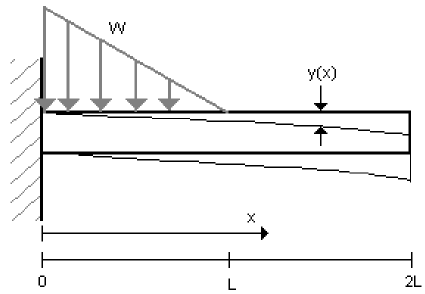
(iii) Considere el caso $k = -\alpha^2, \alpha > 0$ y resuelva las ecuaciones del punto **(ii)** para f y para g.

7. (C2-2000-1-Osses) *Viga bajo carga.* Al ser sometida a una carga W, la viga de la figura tiene una deformación $y(x)$ donde x es la variable longitudinal. Esto puede ser modelado por la EDO de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = W(x)$$

para $o \leq x \leq 2L$ con las siguientes condiciones de borde en los extremos $x = 0$ y $x = 2L$

$$y(0) = y'(0) = y''(2L) = y'''(2L) = 0$$



La carga está distribuida sobre la viga como

$$W(x) = \begin{cases} \frac{w_0}{L}(L-x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

(i) Escriba W usando la función escalón de Heaviside(fn escalón unitaria).

(ii) Usando transformada de Laplace y las dos primeras condiciones de borde, resuelva la ecuación expresando la solución en términos de $A = y''(0)$ y $B = y'''(0)$.

(iii) Calcule y', y'', e y'''. Determine los valores de A y B usando las dos últimas condiciones de borde.