

Departamento de Ingeniería Matemática. FCFM-U. de Chile.

MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guía #1

Semestre 2007-2. Prof.: Axel Osses - Auxs: Nicolás Carreño, Jorge Lemus.

El objetivo de esta primera guía docente del curso es proponer problemas que involucren EDO's elementales:

- Integración directa: $y' = f(x)$.
- Variables separables: $y' = f(x) \cdot g(y)$.
- Ecuaciones Homogéneas: $y' = h(x, y)$, $h(x, y)$ homogénea grado cero.
- Ecuación de Bernoulli: $y' + P(x)y = f(x)y^n$.
- Ecuación de Ricatti: $y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2$.
- Método del factor integrante: $y' + P(x)y = R(x)$.
- No aparece $y(x)$ (orden reducible): $G(x, y', y'') = 0$.
- No aparece x (orden reductible): $H(y, y', y'') = 0$.

Ejercicios:

1. Encontrar las soluciones generales de las siguientes EDO's:

- a) $y' = xy^3$ b) $yy' = x(y^2 + 1)$
c) $(x^2 + 1)tg(y)y' = x$ d) $(1 + \sqrt{y})y' = 1 + \sqrt{x}$
e) $y' = 4x^3(1 + y)$

Nota: Tener siempre en cuenta que $\int \frac{1}{x} dx = \ln(k|x|)$, $k > 0$.

2. Encontrar las soluciones a los problemas de valor inicial que se exponen a continuación:

- a) $y' = ye^x$; $y(0) = 2e$
b) $y' = 2xy^2 + 3x^2y^2$; $y(1) = 1$
c) $y' = 3x^2(y^2 + 1)$; $y(0) = 1$
d) $2yy' = x(x^2 - 16)^{-1/2}$; $y(5) = 2$ (*Hint:* $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$).
e) $y' + 1 = 2y$; $y(x_0) = y_0$
f) $xy' - y = 2x^2y$; $y(1) = 1$

3. Verifique que las siguientes ecuaciones son homogéneas, de ser así resuélvalas:

- a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$
b) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$
c) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$
d) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$
e) $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

4. Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

- a) $xy' + y = y^{-2}$
b) $xy^2y' + y^3 = x \cos(x)$
c) $x^2y' + y^2 = xy$
d) $x^2y' - 2xy = 3y^4$

5. La ecuación de Ricatti es de la forma

$$y' = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (1)$$

suponiendo que se conoce y_1 , solución particular de (1):

a) Demuestre que $y = y_1 + u$ es una familia de soluciones de (1), donde u es solución de

$$\frac{du}{dx} - (Q(x) + 2y_1(x)R(x))u = R(x)u^2 \quad (2)$$

b) Haciendo una sustitución adecuada, pruebe que (2) puede reducirse a la ecuación lineal:

$$\frac{dw}{dx} + (Q(x) + 2y_1(x)R(x))w = -R(x) \quad (3)$$

6. Resolver las siguientes ecuaciones de Ricatti:

a) $y' = 2x^2 + y/x - 2y^2$; $y_1(x) = x$

b) $y' = -2 - y + y^2$; $y_1(x) = 2$

c) $y' = 1 - x - y + xy^2$; $y_1(x) = 1$

7. Resuelva las siguientes ecuaciones a variables separables:

a) $(1 + y^2)dx + (1 + x^2)dy = 0$ b) $(1 + y^2)dx + xydy = 0$

c) $(1 + y^2)dx = xdy$ d) $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$

e) $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$; $y(x = 0) = 1$

f) $y\ln(y)dx + xdy = 0$ g) $y' = a^{x+y}$

h) $(1 + e^x)yy' = e^y$ i) $(\ln(x) + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

8. Muestre que una ecuación diferencial de la forma $y' = f(ax + by + c)$, donde a, b, c son constantes, se puede reducir a una ecuación con variables separables.

9. Diga si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas y resuélvalas:

a) $x(2x^2 + y^2)dx + y(x^2 + 2y^2)dy = 0$

b) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$

c)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \right) dy = 0$$

d) $(3x^2tg(y) - \frac{2y^2}{x^3})dx + (x^3sec^2(y) + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2})dy = 0$

e) $(2x + \frac{x^2+y^2}{x^2y})dx = (\frac{x^2+y^2}{xy^2})dy$

f)

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2} = 0$$

g) $(\sin(x) + \sin(y) + \frac{1}{x})dx + (x\cos(x) - \cos(y) + \frac{1}{y})dy = 0$

h) $xdx + ydy + x(xdy - ydx) = 0$

i) $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$

10. Resuelva las siguientes EDO's de primer orden:

- a) $y' + 2y = x^2 + 2x$
- b) $(x^2 + 2x - 1)y' - (x + 1)y = x - 1$
- c) $x \ln(x)y' - y = x^3(3 \ln(x) - 1)$
- d) $(a^2 + x^2)y' + xy = a^2$
- e) $2xy' - y = 3x^2$
- f) $(x + 1)dy - [2y + (x + 1)^4]dx = 0$
- g) $y' = \frac{1}{x \operatorname{sen}(y) + 2 \operatorname{sen}(2y)}$
- h) $y' - 2xy = 2xe^{x^2}$
- i) $x \ln(x)y' - (1 + \ln(x))y + \frac{1}{2}\sqrt{x}(2 + \ln(x)) = 0$
- j) $y' + y \cos(x) = \sin(x) \cos(x)$
- k) $y' - y = 2xe^{x+x^2}$
- l) $xy' - y = x^2 \operatorname{sen}(x)$
- m) $x(x - 1)y' + y = x^2(2x - 1)$

Problemas de Control:

1. (C1-1999-2-Osses) *Reducción de ecuación homogénea generalizada.*

a) Considere la EDO de primer orden de la forma

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0, \quad (1)$$

donde F es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = y/x$ desarrolle un método general para resolver esta EDO. Aplíquelo a la ecuación $y' = (x+y)/(x-y)$.

b) Considere ahora la EDO

$$y' = F\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right), \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Pruebe que si $ad - bc \neq 0$ la EDO (2) puede llevarse a la forma (1) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, con α y β constantes elegidas adecuadamente. Aplique este método a la ecuación $y' = (x + y + 4)/(x - y - 6)$.

c) ¿Cómo resolvería (2) si $ad - bc = 0$?

2. (C1-2001-2-Alvarez) *Reducción de ecuación lineal homogénea de orden 2.* Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con condiciones iniciales

$$(E) \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, & x \in I \\ y(0) = y_0, & y'(0) = y_1 \end{cases}$$

donde $y_0 > 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo.

a) Pruebe que el cambio de variable $v = y'/y$ reduce la ecuación en (E) a la ecuación de Ricatti

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$$

Deduzca que la resolución de (E) es equivalente a la del siguiente sistema de ecuaciones de primer orden

$$(R) \begin{cases} y' = vy \\ \frac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x) \end{cases}$$

sujeto a una condición inicial apropiada en v (explícitela).

- b) Encuentre la ecuación de Ricatti asociada a $y'' - y' - 2y = 0$ y resuelva el sistema (R) correspondiente, encontrando la solución que satisface $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
3. (C1-2001-1-Osses) *Propiedad de las soluciones de la ecuación de Ricatti.* Sean y_1 , y_2 dos soluciones distintas de la ecuación de Ricatti: $y' + p(x)y^2 + q(x)y + r(x) = 0$, con p , q y r funciones continuas dadas. Demuestre que toda otra solución “ y ” satisface:

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} = C e^{\int p(x)(y_2 - y_1)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(Suponga que y_1 , y_2 e y son derivables con derivada continua.)

Problemas de Modelamiento:

1. (C1-2001-2-Alvarez) *Peso de un ser humano y ley de enfriamiento de Newton.*
- a) El peso de un ser humano desde el nacimiento hasta la muerte puede modelarse por la ecuación de Gompertz
- $$\frac{dW}{dt} = (a - b \cdot \ln(W))W$$
- donde a , b son constantes apropiadas no nulas. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga la condición inicial $W(0) = W_0 > 0$.
- b) La ley de enfriamiento de Newton establece que la *tasa de pérdida* de calor desde la superficie de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el medio que lo rodea y su superficie, con constante de proporcionalidad $k > 0$. Sean $S(t)$ y T_0 las temperaturas de la superficie del objeto y del medio respectivamente (la del medio se supone constante para simplificar).
- i) Encuentre una ecuación diferencial para $S(t)$ y resuélvala con condición inicial $S(t_0) = S_0 > T_0$.
- ii) Pruebe que si además se sabe que $S(t_1) = S_1$ para $t_1 > t_0$ entonces la constante de proporcionalidad está dada por

$$k = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln \left(\frac{S_0 - T_0}{S_1 - T_0} \right)$$

Nota: esta fórmula permite calibrar el modelo, i.e. determinar k utilizando mediciones experimentales de temperaturas.

- iii) Un objeto a una temperatura de 40°C se coloca en una habitación a 20°C . Si en 10 minutos se enfría a 30°C , ¿Cuál es la temperatura del objeto al cabo de 20 minutos?
2. (C1-1999-2-Osses) *Reacción química*. Dos sustancias A y B serán transformadas en un solo compuesto C. Se cumple la ley siguiente: el aumento de la cantidad “ y ” del compuesto C es proporcional (con constante de proporcionalidad k) al producto de las cantidades de sustancia A y B no transformadas aún. Suponga que para formar una unidad de compuesto C se necesita de una unidad de A y una unidad de B. Suponga que en $t=0$ hay a unidades de A, b unidades de B y ninguna de C.
- Escriba una ley de transformación (EDO de primer orden para y) justificando cada uno de sus términos.
 - Resuelva la ecuación diferencial con las condiciones iniciales dadas.
 - Suponga que $k > 0$. Investigue el comportamiento de y cuando $t \rightarrow \infty$
3. (C1-1999-1-Alvarez) *Isótopo radiactivo*. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa de isótopo presente.
- Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t , pruebe que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$ para alguna constante $\lambda > 0$ (llamada constante de desintegración).
 - El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestra era x_0 .
 - Si se sabe que para el año 2000 habrá decaído el 90 % del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determine el año en que falleció el cavernícola a quien perteneció este cráneo.
4. *Curvas de persecución: “La toma del Puente”*. Durante la toma del puente Pío Nono, Panchito, un mechón de nuestra facultad, encuentra a un mechón de Derecho, Simón, merodeando en Plaza Italia. Simón al darse cuenta de que es acechado por Panchito, sale corriendo con velocidad w hacia su facultad. Si el mechón de ingeniería corre a una rapidez v constante, y siempre en dirección hacia el mechón de Derecho, encuentre:
- La ecuación $y = f(x)$ de la trayectoria del mechón de Ingeniería (curva de persecución).
 - Determine la condición para que el mechón de Ingeniería pueda alcanzar al mechón de Derecho y determine el punto de encuentro en función de los parámetros a , v y w .

- c) Determine v tal que el punto de encuentro sea antes de que el mechón de Derecho llegue a su facultad. (Considere que la facultad de Derecho tiene coordenadas $(0, L)$).
Nota: Considere que el mechón de Derecho se desplaza a lo largo del eje Y , y recuerde que el largo de una curva descrita por una función $y(x)$ se puede calcular como $L(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + (y')^2} dx$.
5. (C1-2000-1-Osses) *Modelo estelar.* Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \leq r \leq a$) tales que $p = k\rho^2$ con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones:
- $$p' = -g(r)\rho(r), \quad r^2 g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s) ds$$
- donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r .
- i) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial
- $$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \quad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k}.$$
- ii) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.
Hint: Resuelva para $(r\rho)''$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \rightarrow 0$.
- iii) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \frac{\pi}{\alpha}$.
6. (C1-2002-1-Osses) *La clepsydra.* Un tipo de clepsydra (Ctesibius de Alexandria 245 a.C.) o reloj de agua es una vasija graduada uniformemente con una forma tal que la velocidad de descenso del nivel de agua, a medida que cae libremente por un agujero en su base, es constante. Si $h(t)$ es la altura del nivel de agua, considere que:
- la vasija se obtiene por revolución de la función $f(h)$ en torno al eje vertical con volumen $V(h) = \pi \int_0^h f^2$ (despreciando el tamaño del agujero);
 - la velocidad de salida del agua es la que corresponde a un cuerpo en caída libre desde una altura h y desde el reposo (g =aceleración de gravedad);
 - el área del agujero es πr_0^2 .

Sabiendo que la disminución del volumen es equivalente al flujo de salida, encuentre una EDO de primer orden para $h(t)$ y de ahí deduzca la forma $f(h)$ que debe tener la vasija.
Hint: Cuidado con la regla de la cadena!

7. (C1-2002-1-Osses) *El teléfono celular*. El siguiente es un modelo para la venta esperada de un nuevo teléfono celular:

$$y' = (P_0 - y)(f(t) + \sigma(t)y).$$

- i) Identifique en el modelo qué representa: a) la población total de compradores potenciales; b) el número de personas que compra el nuevo teléfono, c) el coeficiente de compra por imitación, d) los estímulos publicitarios.
- ii) Encuentre una solución **constante** evidente de la ecuación. Reduzca la ecuación a una más simple haciendo un cambio de variables adecuado.
- iii) Dé la forma general de la solución $y(t)$.
- iv) Calcule la solución explícitamente si $f(t) = at$, $\sigma(t) = bt$, $a, b > 0$.
- v) En el caso anterior si además $y(0) = 0$, evalúe la constante indeterminada y determine el tiempo para que la mitad de la población potencial haya comprado el nuevo teléfono.