CAPíTULO 1

Ecuaciones Elementales

1. Introducción

Dos medios A y B se encuentran separados por una membrana impermeable en $t = 0$ con concentraciones C_A^0 y C_B^0 con $C_A^0 < C_B^0$. En un instante $t > 0$ la membrana que los separaba se vuelve semipermeable y permite el paso del agua, pero no de las moléculas disueltas (ver Figura 1). A medida que el tiempo transcurre, el agua se desplaza a

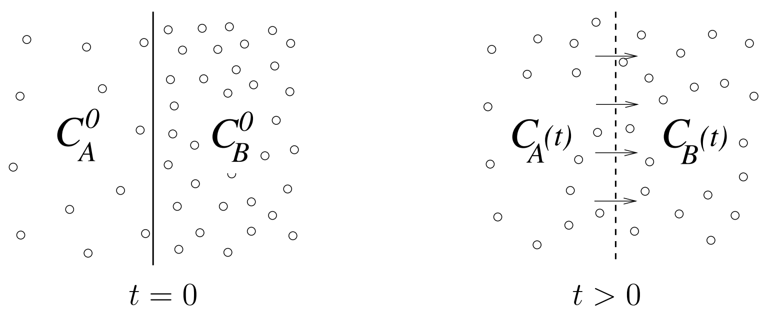

FIGURA 1. Osmosis por una membrana semipermeable.

través de la membrana desde la solución de baja concentración A hacia la de alta concentración B hasta alcanzar asintóticamente un valor de equilibrio como se muestra en el gráfico de la Figura 2. Se sabe que el promedio M de concentraciones es conservado a través del tiempo de modo que se puede obtener en cada instante la concentración en B conociendo la de A y viceversa. Si se hace un gráfico semilogarítmico de $\ln(M - C_A(t))$ en función del tiempo, experimentalmente resulta una recta de pendiente negativa $-\sigma$. Una hipótesis razonable es entonces un ajuste exponencial de $C_A(t)$ a la asíntota de abscisa M, esto es,

$$(1) \qquad \ln(M - C_A(t)) = -\sigma t + C \quad \Rightarrow \quad C_A(t) = M - K\, e^{-\sigma t},$$

donde K es una constante que se obtiene imponiendo la condición inicial:

$$(2) \qquad C_A(0) = C_A^0 \quad \Rightarrow \quad K = M - C_A^0.$$

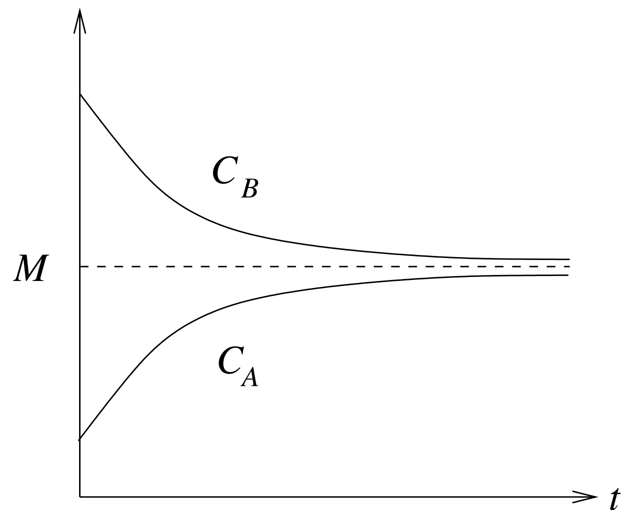

Figura 2. Evolución de las concentraciones durante la osmosis. La asíntota es el promedio de las concentraciones de ambos medios $M = \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$.

Esto nos provee de la fórmula explícita:

$$C_A(t) = M - (M - C_A(0))e^{-\sigma t}. \tag{3}$$

¿Pero hay alguna ley o principio que explique este fenómeno? La idea fundamental consiste en estudiar *si existe una relación simple entre la concentración $C_A(t)$ y su aumento $C'_A(t)$*. Veamos:

$$\begin{aligned} C'_A(t) &= \sigma K e^{-\sigma t} \\ &= \sigma K e^{-\sigma t} + \sigma M - \sigma M \\ &= \sigma(M - (M - K e^{-\sigma t})) \end{aligned}$$

esto es

$$C'_A(t) = \sigma(M - C_A(t)). \tag{4}$$

Tenemos entonces una relación diferencial simple que podemos enunciar como sigue:

> *"El aumento de concentración en A es proporcional en cada instante a la diferencia de concentración entre el promedio asintótico de concentraciones y la concentración en A. La constante de proporcionalidad es σ cuyo valor numérico cuantifica la permeabilidad de la membrana." (Ley de Osmosis)*

2. Entonces, ¿Por Qué Plantear Ecuaciones Diferenciales?

El conocimiento de la ley (4) provee una interpretación más intuitiva de la solución (3), ley que puede por analogía servir para modelar otros problemas similares[1]. Muchos fenómenos de la naturaleza pueden modelarse a través de relaciones entre cantidades y sus variaciones y variaciones de sus variaciones[2]. En términos matemáticos, estamos hablando de identidades que relacionan una función y sus derivadas[3].

Otro ejemplo emblemático es el de la segunda ley de Newton. Recordemos que luego de que Kepler encontrara leyes empíricas a partir de la tablas de Tycho Brahe y estableciera que las órbitas de los planetas eran elípticas, todo ello sería deducible de la segunda ley de Newton combinada con la ley de gravitación universal[4].

Sorprendentemente, el movimiento de los planetas hace parte de los fenómenos en los que se conoce una ecuación diferencial que se cree los representa bien, pero no se logra comprender completamente su solución [5].

Ejercicio Propuesto 2.1. Si en el gráfico del experimento de la Figura 2, el aumento de la concentración en A hubiese resultado con una forma sigmoide (esto es estrictamente creciente hacia la asíntota pero con un punto de inflexión) ¿Qué modelo diferencial propondría usted para este fenómeno?

3. Definiciones Básicas

Definición 3.1. *Una* ***ecuación diferencial ordinaria*** *(abreviada EDO) es una identidad de la forma*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

[1]Ver por ejemplo más adelante la ley de enfriamiento o los modelos de población.

[2]Idea revolucionaria para la ciencia introducida en el siglo XVII entre otros por Fermat, Newton y Leibniz

[3]*fluxiones* en la terminología original de Newton que da además la idea de continuo.

[4]La aceleración de un planeta es proporcional a la fuerza que sobre él ejerce el sol, cuya magnitud es inversa al cuadrado de la distancia que los separa. Esta ecuación con dos derivadas del siglo XVII tiene como solución elipses. En realidad también ejercen fuerza sobre él los demás planetas, lo que lleva a órbitas muchísimo más complicadas y al estudio posterior de órbitas caóticas en el siglo XX por Poincaré entre otros.

[5]Es el caso también de las ecuaciones de Navier-Stokes que modelan el movimiento de un fluido tridimensional, y no se sabe si dan lugar o no a una única solución o el de la ecuación de Schrëdinger, que modela la dualidad onda-partícula de la realidad de manera increíblemente simple, pero no se sabe si pueden dar alguna luz sobre el mecanismo del pensamiento.

donde x es la variable independiente e y es la función incógnita. La función F representa la relación que liga las derivadas[6] *de y. Se dice que la ecuación es ordinaria pues se deriva con respecto a una sola variable*[7].

Definición 3.2. *El* ***orden*** *de una ecuación diferencial es el grado de derivación máximo que aparece en la ecuación que en este caso es el número natural*[8] *n.*

Ejemplo 3.1. $y(1+(y')^2)=4$. EDO no lineal, de orden 1[9].

Definición 3.3. *Una EDO* ***lineal*** *de orden n es de la forma*

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \;=\; Q(x), \tag{5}$$

con $a_i(x) \in \mathbb{R}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$ llamados coeficientes. Si $Q(x)=0$, la EDO lineal se dice ***homogénea****. Si $Q(x) \neq 0$, la EDO lineal se dice* ***no homogénea****. Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x, se dice que la EDO lineal es a* ***coeficientes constantes****. De lo contrario se dice que ella es a* ***coeficientes variables****.*

Definición 3.4. *En el caso que $a_n(x) \neq 0$ se puede dividir la EDO (5) por $a_n(x)$. La EDO que así se obtiene con*

$$\overline{a}_n(x)=1, \quad \overline{a}_i(x)=\frac{a_i(x)}{a_n(x)},\; i=0,\ldots,n-1, \quad \overline{Q}(x)=\frac{Q(x)}{a_n(x)}$$

es llamada EDO ***normalizada*** [10].

Ejemplo 3.2. $xy' + c\,\mathrm{sen}(x)y = \tan(x)$. EDO lineal de orden 1 a coeficientes variables, no homogéna ni normalizada.

Ejemplo 3.3. $y'' - 2y = 0$. EDO lineal de orden 2 a coeficientes constantes, homogénea y normalizada.

4. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Elementales

Empecemos resolviendo cuatro tipos de EDO que son elementales:

- Integración directa: $y' = f(x)$.
- Variables separables: $y' = f(x)g(y)$.

---

[6]En lo sucesivo las primas ($'$, $''$, $'''$, etc.) indicarán derivadas así como los superíndices entre paréntesis.

[7]Si se deriva con respecto a varias variables, se habla de Ecuación Diferencial Parcial (EDP).

[8]Existen ecuaciones en las que esto no se cumple! se llaman Ecuaciones Pseudo Diferenciales (EΨD)

[9]EDO de la curva braquistócrona, ver Capítulo 1.

[10]Si $a_n(x)=0$ para valores discretos de x, se puede normalizar por intervalos.

n	orden de la EDO
$Q(x) = 0$	homogénea
$Q(x) \neq 0$	no homogénea
$\forall i,\ a_i = cte$	coeficientes constantes
$\exists i,\ a_i = a_i(x)$	coeficientes variables
$a_n = 1$	normalizada

CUADRO 1. Clasificación de la EDO lineal $\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)} = Q$.

- EDO lineal de orden 1 homogénea: $y' + \overline{a}_0(x)y = 0$.
- EDO lineal de orden 1 no homogénea: $y' + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q}(x)$.

En este capítulo que tiene como objetivo familiarizarse con ciertas EDO básicas y resolver problemas clásicos, no nos preocuparemos de la regularidad requerida para hacer los cálculos ni de aspectos muy detallado de existencia y unicidad de soluciones. Esto será tratado con más profundidad en los siguientes capítulos. No obstante, es bueno recordar las dos identidades (6) y (7) del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) que se utilizarán a menudo y que se suelen confundir.

TEOREMA 4.1 (TFC). *Sea f integrable en $[a, b]$, entonces, dado $x_0 \in [a, b]$ e $y_0 \in \mathbb{R}$, la función*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \forall x \in [a, b]$$

así definida es continua en $[a, b]$ y se tiene $y(x_0) = y_0$. Si además f es continua en $[a, b]$ entonces la función $y(x)$ es derivable[11] *en $[a, b]$ con derivada continua $f(x)$, esto es, se tiene que*

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(s)ds, \quad \forall x \in [a, b] \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(s)ds = f(x) \quad \forall x \in [a, b]. \tag{7}$$

5. Integración Directa

Para la EDO

$$y' = f(x) \tag{8}$$

[11]Derivable en el cerrado $[a, b]$ significa derivable en el abierto (a, b) y con derivadas laterales en a^+ y b^-.

se obtiene por cálculo de primitivas que

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{9}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ es una constante arbitraria. Se suele denotar por C genéricamente a una constante arbitraria sin importar demasiado las eventuales transformaciones biyectivas que la mantienen arbitraria (ponderaciones por escalar no nulo, cambios de signo, suma de otra constante). En este sentido C, $2C$, $C/\sqrt{2}$, $-C$, $C+4$ pueden ser representadas por una misma constante genérica C. Sin embargo, si la transformación no es biyectiva, por ejemplo C^2, entonces se pierde la arbitrariedad y es mejor escribir C^2 o reemplazar C^2 por una constante arbitraria $K \geq 0$.

Ejemplo 5.1. $y' = \text{sen}(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \int \text{sen}(x)dx + C \\ &= -\cos(x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2. $y' = x$:

$$\begin{aligned} y &= \int x dx + C \\ &= \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. $y' = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$:

$$\begin{aligned} y &= \int \frac{dx}{x} + C \\ &= \ln(|x|) + C \\ &= \ln(|x|) + \ln(k), (k > 0) \\ &= \ln(k|x|) \end{aligned}$$

Notar que la constante arbitraria C también puede escribirse como $\ln(k)$ para $k > 0$. Esto se tiene porque $\ln(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$. Notar también el módulo en el logaritmo, que es la primitiva correcta de $1/x$ cuando $x < 0$. Como $|x|$ no es derivable en cero, se considera la resolución de la EDO separadamente en cada intervalo $\mathbb{R}_-$ y $\mathbb{R}_+$.

Resolvamos ahora por integración definida la EDO $y' = f(x)$ con $x \in I$, donde I es un intervalo real no vacío. Escogemos primero un $x_0 \in I$ cualquiera e integramos la ecuación entre x_0 y x:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{x_0}^{x} f(s)ds, \quad \forall x \in I.$$

Del TFC (ver identidad (6)), se tiene que

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds + y(x_0) \tag{10}$$

Detengámonos aquí para comparar (9) y (10). Está claro que la función $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds$ en (10) es una primitiva bien particular de f: aquella tal que $F(x_0) = 0$. Entonces la constante C en (9) deja de ser arbitraria y se cumple $C = y(x_0)$. Esto será recurrente en la resolución de EDO. Siempre podremos determinar la constante arbitraria si conocemos el valor de la función en un punto del intervalo, este valor corresponde a una *condición inicial* o a una *condición de borde* dependiendo si la variable x se interpreta como tiempo o como espacio respectivamente.

Ejemplo 5.4. $y' = \dfrac{1}{x}; x_0 = 1, x > 0$:

$$\begin{aligned}
\int_1^x y'(x)dx &= \int_1^x \frac{dx}{x} \\
y(x) - y(1) &= \ln(x)\Big|_1^x \\
y(x) &= \ln(x) - \ln(1) + y(1) \\
y(x) &= \ln(x) + y(1).
\end{aligned}$$

Si $x_0 = -1, -1 < x < 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^x y'(x)dx &= \int_x^{-1} \frac{dx}{x} \\
y(x) - y(-1) &= \ln(|x|)\Big|_{-1}^x \\
y(x) &= \ln(-x) + y(-1).
\end{aligned}$$

Hagamos ahora un comentario sobre la unicidad por intervalos. Si se tienen dos soluciones:

$$\begin{aligned}
y_1'(x) &= f(x), \quad \forall x \in I \\
y_2'(x) &= f(x), \quad \forall x \in I,
\end{aligned}$$

entonces restando ambas ecuaciones, se obtiene[12]

$$\begin{aligned}
(y_1 - y_2)' &= 0 \\
y_1 - y_2 &= C \\
y_1 &= y_2 + C
\end{aligned}$$

[12]Recordar que se usa el Teorema del Valor Medio para probar que si $f' = 0$ en un intervalo entonces f es constante en dicho intervalo.

luego las dos soluciones son iguales salvo una constante $C \in \mathbb{R}$ *en el intervalo* I. Porque esta constante puede cambiar al cambiar el intervalo donde se comparan las soluciones, como se ilustra en el ejemplo de la Figura 3.

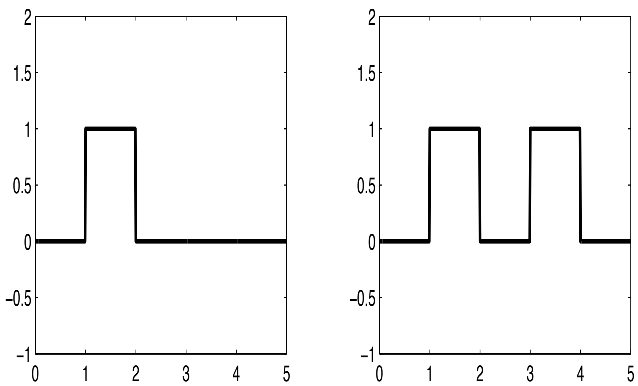

FIGURA 3. Las funciones del gráfico de la izquierda y de la derecha son soluciones de la misma EDO $y' = 0$ en cada intervalo abierto $(i, i+1)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ellas difieren no en una constante única sino en una constante distinta en cada intervalo.

6. Variables Separables

Una EDO a variables separables tiene la forma:

$$y' = f(x)g(y). \tag{11}$$

La solución esta vez se obtiene como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{y'}{g(y)} &= f(x) \\ \int \frac{y'dx}{g(y)} &= \int f(x)dx + C \\ \int \frac{dy}{g(y)} &= \int f(x)dx + C \qquad (12) \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante.

EJEMPLO 6.1. $y' = xy : f(x) = x, g(y) = y, y \neq 0$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int x dx + C \\
\ln(|y|) &= \frac{x^2}{2} + C \\
|y| &= \exp\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\
|y| &= \exp(C) \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\
|y| &= k \cdot \exp\left(\frac{x^2}{2}\right), k = \exp(C)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, eliminando el módulo, la solución es $y = k \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, con $k \neq 0$. Si agregamos la solución $y = 0$, se tendrá $y = k \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$, con $k \in \mathbb{R}$.

El método de separación de variables asume que $g(y) \neq 0$. A veces, se están eliminando posibles soluciones constantes de la EDO ($y' = 0$) que no hay que despreciar.

EJEMPLO 6.2. $y' = \cos^2(y) : f(x) = 1, g(y) = \cos^2(y), y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\cos^2(y)} &= \int dx + C \\
\int \sec^2(y) dy &= x + C \\
\tan(y) &= x + C \\
y &= \arctan(x + C), C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Finalmente, hay que agregar las soluciones constantes $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ para las cuales $\cos^2(y) = 0$.

Veamos ahora cómo funciona el método con integrales definidas. Si se integra entre $x_0 \in I$ y $x \in I$ a ambos lados de (11), se tiene que

$$\int_{x_0}^{x} \frac{y'(x)dx}{g(y(x))} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

considerando ahora el cambio de variables $s = y(x) \Rightarrow ds = y'(x)dx$,

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{x_0}^{x} f(x)dx.$$

Si $G(s)$ es primitiva de $\dfrac{1}{g(s)}$ y $F(x)$ es primitiva de $f(x)$, se tiene que

$$\begin{aligned} G(y(x)) &= F(x) - F(x_0) + G(y(x_0)) \\ &= F(x) + C \end{aligned}$$

con $C = F(x_0) + G(y(x_0))$ constante. Compare (12) y (13) como se hizo antes entre (9) y (10).

Las condiciones para que el método funcione son que $\frac{1}{g(y)}$ sea integrable con respecto a y y que $f(x)$ sea integrable con respecto a x (y si queremos una solución analítica, que podamos calcular sus primitivas). Recuerde siempre que valores de y constante para los que $g(y) = 0$ son también soluciones.

El siguiente ejemplo muestra que con este método la solución puede quedar implícitamente o paramétricamente definida.

Ejemplo 6.3 (Braquistócrona). Se denomina así a la forma que debe tener un alambre para que una argolla que se desliza por él sin roce bajo la acción de la gravedad de un punto a otro de menor altura y no en la misma vertical, lo haga en el menor tiempo posible.

La EDO que describe la forma de la curva es[13] (con $k > 0$):

$$y(1 + (y')^2) = k^2$$

utilizando el método de separación de variables, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \underbrace{\left(\frac{k^2 - y}{y}\right)^{\frac{1}{2}}}_{g(y)} \cdot \underbrace{1}_{f(x)} \\ \int \frac{y^{\frac{1}{2}} dy}{\sqrt{k^2 - y}} &= \int dx + C \end{aligned}$$

[13]Jean de Bernouilli encontró esta EDO conjeturando una forma continua de la ley de Snell.

haciendo el cambio de variable $y = k^2 \operatorname{sen}^2\theta \Rightarrow dy = 2k^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{k \operatorname{sen}\theta 2k^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta}{k\cos\theta} &= x + C \\
2k^2 \int \operatorname{sen}^2\theta d\theta &= x + C \\
2k^2 \int \frac{1-\cos(2\theta)}{2} d\theta &= x + C \\
2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right) &= x + C \\
x &= 2k^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{4}\right) - C
\end{aligned}$$

por lo tanto, se tiene que $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k^2}{2}(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta) - C \\
y &= \frac{k^2}{2}(1 - \cos 2\theta)
\end{aligned}$$

si $\omega = 2\theta, \omega \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
x &= \frac{k^2}{2}(\omega - \operatorname{sen}\omega) - C \\
y &= \frac{k^2}{2}(1 - \cos\omega)
\end{aligned}$$

la solucion es una familia biparamétrica de curvas (cicloides). Ver Figura 6.3.

Ejemplo 6.4 (El problema de la gota de lluvia). Consideremos una gota de masa inicial m_0 y de densidad constante que cae del reposo y calculemos su masa en función del tiempo usando el siguiente principio:

> *"Una gota de lluvia que cae por efecto de su peso va aumentando su volumen conforme que cae, a medidad que captura gotas más pequeñas en su superficie inferior. Esto es, a una tasa que es proporcional a su velocidad de caída y a su superficie inferior.*

Supondremos que i) la gota es esférica, ii) la gota alcanza una aceleración constante, iii) esta aceleración límite es menor que la de gravedad. Si el radio de la esfera es $r(t)$ entonces su volumen es proporcional a r^3 y su superficie media a r^2. Si la densidad es constante, entonces la masa es $m(t)$ es proporcional a r^3 de donde despejando $r(t)$ resulta proporcional a $m^{1/3}$. Con esto, suponiendo que y es la distancia recorrida

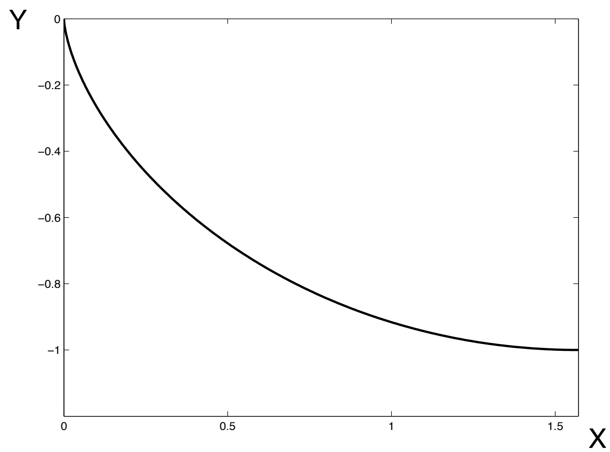

FIGURA 4. Curva Braquistócrona con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $y \in [-1, 0]$, parámetro $k = 1$ y constante $C = 0$.

verticalmente hacia abajo por la gota, la EDO queda:

$$m'(t) = Km^{2/3}y', \quad K > 0 \text{ constante.}$$

Además, la segunda ley de Newton (atención que la masa es variable) es

$$(my')' = mg.$$

Los siguientes cálculos hacen dos veces el reemplazo de la primera EDO, algunos despejes y una derivación (notar que en el camino se nos va la constante K):

$$\begin{aligned}
m'y' + my'' &= mg \\
Km^{2/3}(y')^2 + my'' &= mg \\
Km^{-1/3}(y')^2 + y'' &= g \\
m^{1/3} &= \frac{K(y')^2}{g - y''} \\
\frac{1}{3}\, m^{-2/3}m' &= \left(\frac{K(y')^2}{g - y''}\right)' \\
y' &= 3\left(\frac{(y')^2}{g - y''}\right)' \\
y' &= 3\frac{2(g - y'')y'y'' + y'''(y')^2}{(g - y'')^2} \\
y'(g - y'')^2 &= 6(g - y'')y'y'' + 3y'''(y')^2 \\
3y'''y' &= (g - y'')(g - y'' - 6y'') = (g - y'')(g - 7y'')
\end{aligned}$$

de donde suponiendo que $y'' < g$ y que la aceleración es constante ($y''' = 0$) se obtiene que

$$y'' = \frac{g}{7}.$$

Ahora integrando una vez (y suponiendo que la gota parte del reposo) se obtiene la velocidad

$$y' = \frac{gt}{7}.$$

Reemplazando este valor en la EDO original de la masa se obtiene

$$m' = \frac{gK}{7} t\, m^{2/3},$$

que es una EDO a variables separables. Resolviendo se obtiene

$$\int m^{-2/3} dm = \frac{gK}{7}\frac{t^2}{2} + C$$

esto es

$$\frac{m^{-2/3+1}}{-2/3+1} = 3m^{1/3} = \frac{gK}{14} t^2 + C.$$

Si suponemos que la masa inicial era m_0, se obtiene $C = 3m_0^{1/3}$ de donde finalemente

$$m(t) = \left(\frac{gK}{42} t^2 + m_0^{1/3}\right)^3.$$

Ejercicio Propuesto 6.1. ¿Es razonable pensar que la masa crece de manera no acotada con el tiempo? ¿Qué se podría considerar adicionalmente en el modelo para mejorarlo?

7. EDO Lineal de Primer Orden Homogénea

Se tiene la EDO:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{13}$$

Normalizando los coeficientes, es decir, con $\overline{a}_0(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}, a_1(x) \neq 0$ se obtiene:

$$y' = -\overline{a}_0(x)y.$$

Se puede aplicar el método de variables separables con $f(x) = \overline{a}_0(x)$ y $g(y) = y$:

$$\begin{aligned} \ln(|y|) &= -\int \overline{a}_0(x)dx + C \\ |y| &= k \exp\left(-\int \overline{a}_0(x)dx\right), k > 0 \\ y &= k \exp\left(-\int \overline{a}_0(x)dx\right), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 7.1. $y' \cos x + \dfrac{1}{\cos x} y = 0 : x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{\cos^2 x} y &= 0 \\ y' + y \sec^2 x &= 0 \\ y' &= -y \sec^2 x \\ \int \frac{dy}{y} &= -\int \sec^2 x dx + C \\ \ln(|y|) &= -\tan x + C \\ y &= k \exp(\tan x), k \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

después de considerar también la solución constante nula.

8. EDO Lineal de Primer Orden no Homogénea

Se tiene la ecuación:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x) \tag{14}$$

Normalizando $\left(\overline{a}_0(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}, \overline{Q}(x) = \dfrac{Q(x)}{a_1(x)}, a_1(x) \neq 0\right)$:

$$y' + \overline{a}_0(x)y = \overline{Q}(x)$$

En este caso se puede utilizar el método del *factor integrante*, que consiste en multiplicar a ambos lados de la ecuación por el factor $\exp\left(\int \overline{a}_0(x)dx\right)$, de manera que en el miembro izquierdo aparezca una expresión que resulta de derivar $y \exp\left(\int \overline{a}_0(x)dx\right)$ con respecto a x:

$$y' \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right) + y\overline{a}_0(x) \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right) = \overline{Q}(x) \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right)$$

$$\left(y \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right)\right)' = \overline{Q}(x) \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right)$$

$$y \exp\left(\textstyle\int \overline{a}_0(x)dx\right) = \textstyle\int \overline{Q}(x) \exp\left(\int \overline{a}_0(s)ds\right) dx + C$$

Multiplicando por $\exp\left(-\int \overline{a}_0(x)dx\right)$, la solución queda de la forma:

$$y = \underbrace{C\exp\left(-\int \overline{a}_0(x)dx\right)}_{y_h} + \underbrace{\exp\left(-\int \overline{a}_0(x)dx\right)\int \overline{Q}(x)\exp\left(\int \overline{a}_0(s)ds\right)dx}_{y_p}$$

donde y_h se llama *solución homogénea*[14] (que se obtiene si $\overline{Q}(x) = 0$) e y_p se llama *solución particular*[15] (que se obtiene si $C = 0$).

Ejemplo 8.1 (Ley de osmosis). Retomamos el ejemplo de la Introducción donde estudiamos básicamente el movimiento de agua desde una solución con baja concentración de soluto (solución A) a través de una membrana semipermeable hacia una solución con alta concentración de soluto (solución B). Si $C_A(t)$ es la concentración de soluto que hay en la solución A en función del tiempo, C_A^0 es la concentración inicial de soluto en A y si C_B^0 es la concentración inicial de soluto en B, una EDO que modela este fenómeno es:

$$C_A'(t) = \sigma\left(\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} - C_A(t)\right), \sigma > 0.$$

Introduciendo la concentración promedio $\frac{C_A^0 + C_B^0}{2} = M$, se tiene

$$\begin{aligned}
C_A' + \sigma C_A &= \sigma M \\
C_A'\exp\left(\int \sigma dt\right) + \sigma C_A \exp\left(\int \sigma dt\right) &= \sigma M \exp\left(\int \sigma dt\right) \\
C_A' e^{\sigma t} + \sigma C_A e^{\sigma t} &= \sigma M e^{\sigma t} \\
\left(C_A e^{\sigma t}\right)' &= \sigma M e^{\sigma t} \\
C_A e^{\sigma t} &= \int \sigma M e^{\sigma t} dt + C \\
C_A &= Ce^{-\sigma t} + \sigma M e^{-\sigma t}\int e^{\sigma t} dt
\end{aligned}$$

y como $\int e^{\sigma t} dt = \frac{1}{\sigma} e^{\sigma t}$, se tiene que

$$C_A(t) = Ce^{-\sigma t} + M$$

[14]Se habla de *la* solución homogénea, pero es una familia uniparamétrica de soluciones.

[15]Se habla de *la* solución particular, pero depende aquí de la primitiva que se tome.

con $C \in \mathbb{R}$. El resultado es una familia uniparamétrica de curvas (parámetro C). Si evaluamos en el tiempo inicial $t = 0$, se puede encontrar el valor de la constante C, es decir, $C_A(0) = C + M$ y $C_A(0) = C_A^0$, luego $C = C_A^0 - M = \dfrac{C_A^0 - C_B^0}{2}$. Por lo tanto, la solución es

$$C_A(t) = \left(\frac{C_A^0 - C_B^0}{2}\right) e^{-\sigma t} + \frac{C_A^0 + C_B^0}{2}$$

Ejemplo 8.2 (Ley de enfriamiento de Newton). Los más valientes hemos experimentado el hecho de que al bañarnos en el mar cuando se acerca la noche el agua se siente tibia.

Apliquemos el siguiente principio, llamado ley de enfriamiento de Newton, para estudiar las diferencias de temperatura entre el mar y la atmósfera por ejemplo:

> *"Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y el medio ambiente es pequeña, el calor transferido en una unidad de tiempo entre el cuerpo y la atmósfera es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio ambiente." (Ley de enfriamiento de Newton)*

Sean T y T_A las temperaturas del mar y del ambiente respectivamente, la EDO que modela el fenómeno es entonces:

$$T'(t) = k(T_A(t) - T(t)),$$

donde $k > 0$ es una constante[16]. Si $T(0) = T_0$ es la temperatura inicial del mar, suponiendo primero que T_A es constante, se tiene que

$$\begin{aligned} T' + kT &= kT_A \\ T'e^{kt} + kTe^{kt} &= kT_A e^{kt} \\ \left(Te^{kt}\right)' &= kT_A e^{kt} \\ Te^{kt} &= k\int T_A e^{kt} dt + C \\ T &= Ce^{-kt} + T_A \end{aligned}$$

de donde evaluando en $t = 0$ se obtiene $C = T_0 - T_A$. Con esto se tiene finalmente

$$T(t) = (T_0 - T_A)e^{-kt} + T_A.$$

La temperatura del mar pues, tiende exponencialmente a la temperatura ambiente. Más rápidamente a mayores valores de k. Ver Figura 8.2.

[16]La constante k o coeficiente de transferencia térmica, depende localmente de la superficie de contacto, calor específico y masas involucradas.

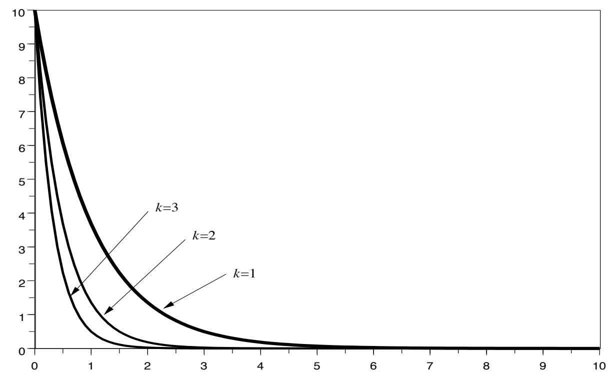

FIGURA 5. Comportamiento de la temperatura del mar $T(t)$ frente a una temperatura ambiente constante $T_A = 0$ partiendo de una temperatura inicial $T(0) = 10$ para distintos valores de la constante k.

Si T_A está ahora en función del tiempo y es una función periódica de la forma $T_A(t) = T_A^0 + A\operatorname{sen}(\omega\, t)$, con frecuencia $\omega = 2\pi/24h$ por ejemplo, la solución se obtiene de la forma:

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + ke^{-kt}\int A\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt \tag{15}$$

Desarrollando $\int A\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int A\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt &= A\int \operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt\\ &= A\left(\frac{-1}{k}\int \omega\cos(\omega t)e^{kt}dt + \frac{1}{k}\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}\right)\\ &= A\left(\frac{-\omega^2}{k^2}\int \operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt - \frac{\omega}{k^2}\cos(\omega t)e^{kt} + \frac{1}{k}\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}\right)\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\left(1+\frac{\omega^2}{k^2}\right)\int \operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt = \frac{e^{kt}}{k}\left(\operatorname{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{k}\cos(\omega t)\right)$$

luego, $\int A\operatorname{sen}(\omega t)e^{kt}dt = \dfrac{Ak}{k^2+\omega^2}e^{kt}\left(\operatorname{sen}(\omega t) - \dfrac{\omega}{k}\cos(\omega t)\right)$. Por lo tanto (15) queda de la forma

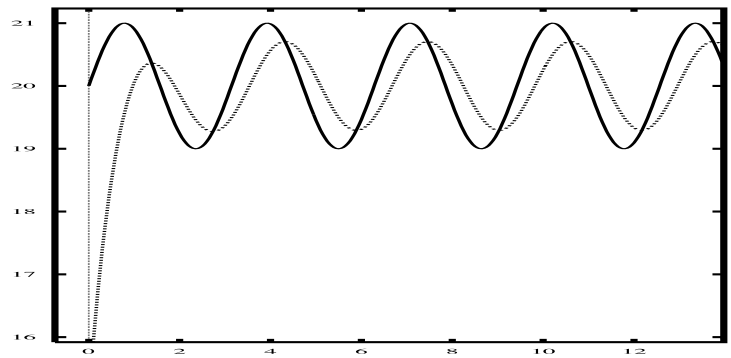

FIGURA 6. Variación de la temperatura del mar $T(t)$ inicialmente con $T(0) = 15$ frente a una temperatura ambiente $T_A(t) = 20 + \mathrm{sen}(2t)$ (línea gruesa). Asintóticamente, $T(t)$ tiene un desfase positivo y una amplitud menor respecto de $T_A(t)$.

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak^2}{k^2+\omega^2}\Big(\mathrm{sen}(\omega t) - \frac{\omega}{k}\cos(\omega t)\Big)$$
$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\left(\frac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\,\mathrm{sen}(wt) - \frac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\cos(\omega t)\right)$$

Si consideramos $\mathrm{sen}\,\phi = \dfrac{\omega}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$ y $\cos\phi = \dfrac{k}{\sqrt{k^2+\omega^2}}$, se tiene

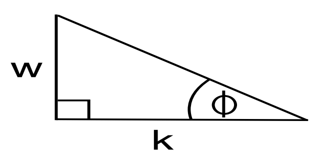

FIGURA 7. Relación entre ϕ, k y ω.

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_A^0 + \frac{Ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\underbrace{(\mathrm{sen}(\omega t)\cos(\phi) - \cos(\omega t)\,\mathrm{sen}(\phi))}_{\mathrm{sen}(\omega t - \phi)}$$

Finalmente, $T(t) = \underbrace{Ce^{-kt}}_{y_h} + \underbrace{T_A^0 + \dfrac{Ak}{\sqrt{k^2+\omega^2}}\,\mathrm{sen}(\omega t - \phi)}_{y_p}$, esto es, las variaciones de la temperatura del mar se encuentran asintóticamente retrasadas o *con desfase positivo* con respecto a las del ambiente (ver

Figura 6). Además, notar que la amplitud asintótica de la temperatura del cuerpo es menor que la amplitud de variación de la temperatura ambiente ya que $k/\sqrt{k^2+\omega^2} < 1$.

Ejercicio Propuesto 8.1. Explique cómo se puede estimar el coeficiente k a partir del tiempo que separa dos máximos sucesivos de la temperatura ambiente y de la temperatura del mar.

9. Ecuaciones Reductibles a Casos Elementales

9.1. Ecuaciones homogéneas. Son del tipo

$$y' = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

donde $f(\lambda x, \lambda y) = \pm\lambda^k f(x,y)$ y $g(\lambda x, \lambda y) = \pm\lambda^k g(x,y)$. Se dice que f y g son homogéneas de grado k. Para resolverlas, se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \\ &= \frac{f\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right)}{g\left(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x}\right)} \\ &= \frac{\pm x^k f\left(1, \frac{y}{x}\right)}{\pm x^k g\left(1, \frac{y}{x}\right)} \\ &= \frac{f\left(1, \frac{y}{x}\right)}{g\left(1, \frac{y}{x}\right)} \\ &= h\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $z = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xz \Rightarrow y' = xz' + z$, se tiene que

$$\begin{aligned} xz' + z &= h(z) \\ xz' &= h(z) - z \\ \frac{z'}{h(z)-z} &= \frac{1}{x} \\ \int \frac{dz}{h(z)-z} &= \int \frac{dx}{x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 9.1 (Curva de persecusión). Sobre un río, en la posición $P = (c, 0)$, un bote trata de alcanzar la orilla situada en la posición $O = (0, 0)$ como se muestra en la Figura 9.1. Se quiere caracterizar la posición en el eje OY con respecto a la posición en el eje OX. La rapidez de la corriente del río es a en dirección $(0, -1)$. La rapidez del bote es b en dirección $(-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ apuntando hacia O. Si las coordenadas del bote en un tiempo dado son $B = (x, -y)$, la rapidez en cada eje esta dada por

$$\frac{dx}{dt} = -b\cos\theta, \qquad \frac{dy}{dt} = b\operatorname{sen}\theta - a.$$

Aplicando regla de la cadena a $\dfrac{dy}{dx}$, y recordando que $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}$

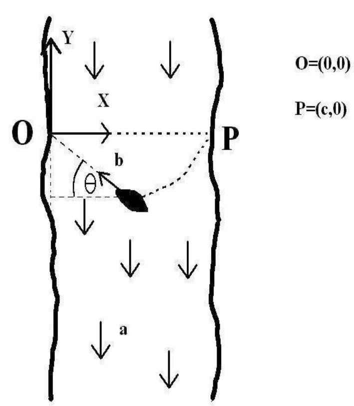

Figura 8. Bote con rapidez b cruzando un río cuya corriente tiene rapidez a.

y $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{-y}{\sqrt{y^2+x^2}}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\
\frac{dy}{dx} &= \left(\frac{-b\cos\theta}{b\operatorname{sen}\theta - a}\right) = \frac{-a + b\left(\dfrac{-y}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)}{-b\left(\dfrac{x}{\sqrt{y^2+x^2}}\right)} = \frac{-a\sqrt{x^2+y^2} - by}{-bx}
\end{aligned}$$

esta última ecuación es homogénea de grado 1, por lo tanto (recordando el cambio de variable $z = \frac{y}{x} \Rightarrow xz' + z = y'$)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{-a\sqrt{1+z^2} - bz}{-b} \\
xz' + z &= \frac{a}{b}\sqrt{1+z^2} + z \\
\frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{bx} \\
\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \frac{a}{b}\ln x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \frac{a}{b}\ln x + \frac{a}{b}\ln k, k > 0 \\
\ln(z + \sqrt{1+z^2}) &= \ln(kx)^{\frac{a}{b}} \\
z + \sqrt{1+z^2} &= (kx)^{\frac{a}{b}} \\
1 + z^2 &= (kx)^{\frac{2a}{b}} - 2z(kx)^{\frac{a}{b}} + z^2 \\
z &= \frac{1}{2}\left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}\right] \\
\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}\right] \\
y &= \frac{x}{2}\left[(kx)^{\frac{a}{b}} - (kx)^{-\frac{a}{b}}\right]
\end{aligned}$$

la constante k se puede obtener de la condición de borde $y(c) = 0$ de donde se obtiene $k = \dfrac{1}{c}$.

9.2. Bernoulli. La ecuación de Bernoulli es de la forma ($n \neq 0$)

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

con p, q funciones de x. Se realiza el cambio de variable $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$. Multiplicando $(1-n)y^{-n}$ a ambos lados de la ecuación, queda

$$\begin{aligned}
(1-n)y^{-n}y' + p(x)(1-n)y^{1-n} &= (1-n)q(x) \\
z' + p(x)(1-n)z &= (1-n)q(x)
\end{aligned}$$

que resulta ser una ecuación lineal no homogénea de primer orden normalizada.

Ejemplo 9.2 (Modelo Logístico de población). El modelo logístico se basa en el siguiente principio:

> *"El aumento de una población es proporcional al producto entre la población misma y su diferencia respecto a un valor máximo que es función de los recursos disponibles limitados. Es así como al sobrepasar dichos recursos, la población decrece." (Ley logística)*

Esto traducido a una EDO queda como:

$$P' = \sigma P(M - P) \tag{16}$$

donde $\sigma > 0$ es constante (por ejemplo la diferencia entre tasas de natalidad y mortalidad) y $M > 0$ es una carga máxima alcanzable. Notar que si P sobrepasa M entonces P' es negativo. En esta ecuación tipo Bernouilli, hacemos el cambio de variables $z = \frac{1}{P}$ con $z' = \frac{-P'}{P^2}$ y obtenemos

$$z' = -M\sigma z + \sigma,$$

de donde:

$$\frac{1}{P} = \exp\left(-\int_0^t M\sigma(s)ds\right)\left(\frac{1}{P_0} + \int_0^t \exp\left(\int_0^s M\sigma(s)ds\right)\sigma(s)ds\right).$$

Reordenando se obtiene:

$$P = \frac{P_0\, M}{P_0 + (M - P_0)\exp(-M\sigma\, t)}. \tag{17}$$

Notar que $P(0) = P_0$ y que $P \to M$ si $t \to \infty$.

9.3. Riccati. La ecuación de Riccati es de la forma

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x) \tag{18}$$

con p, q, r funciones de x. Se realiza el cambio de variable $y = y_1 + \dfrac{1}{z}$, donde y_1 es alguna solución conocida (por ejemplo fácil de calcular) de (18) (esto es se cumple que $y_1' = p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)$). Derivando con respecto a x se tiene $y' = y_1' - \dfrac{z'}{z^2}$ y reemplazando en (18),

$$\begin{aligned}
y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x)\left(y_1 + \frac{1}{z}\right)^2 + q(x)\left(y_1' - \frac{z'}{z^2}\right) + r(x)\\
y_1' - \frac{z'}{z^2} &= p(x)y_1^2 + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + q(x)y_1 + \frac{q(x)}{z} + r(x)\\
y_1' - \frac{z'}{z^2} &= [p(x)y_1^2 + q(x)y_1 + r(x)] + 2p(x)\frac{y_1}{z} + \frac{p(x)}{z^2} + \frac{q(x)}{z}\\
z' &= -2p(x)y_1 z - p(x) - q(x)z\\
&\Rightarrow z' + (2p(x)y_1 + q(x))z = -p(x),
\end{aligned}$$

que resulta ser una EDO lineal de primer orden no homogénea en la variable z.

9.4. EDO de segundo orden sin variable dependiente. En la ecuación

$$G(x, y', y'') = 0$$

no aparece la variable y explicitamente. En estos casos se realiza el cambio de variable $p = y'$, con lo cual la ecuación se transforma en

$$G(x, p, p') = 0$$

que es una EDO de primer orden. Por lo tanto, la transformación es la siguiente:

$$G(x, y', y'') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} G(x, p, p') = 0 \\ y' = p \end{cases}$$

9.5. EDO de segundo orden sin variable independiente. En la ecuación

$$H(y, y', y'') = 0$$

no aparece la variable x explicitamente. Se realiza el cambio de variable $p = y' = \dfrac{dy}{dx}$ e $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dp}{dy}p$, con lo cual la ecuacion se transforma en

$$H\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

que es una EDO de primer orden en la variable p con variable independiente y.

Ejemplo 9.3 (Ley de Hooke). Se tiene el sistema indicado en la Figura 9.3, siendo $k > 0$ constante de elasticidad del resorte y m la masa del cuerpo. La ley de Hooke establece que:

> *"Para pequeños desplazamientos en torno a la posición de equilibrio, la fuerza de restitución del resorte es proporcional al desplazamiento". (Ley de Hooke)*

Esto es:

$$my'' = -ky \qquad \text{o} \qquad y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

Definiendo $w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, se tiene la EDO $y'' + w^2y = 0$. Si $z = y' \Rightarrow z' =$

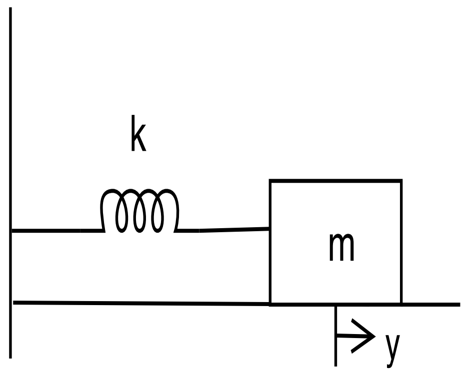

FIGURA 9. Sistema mecánico de un resorte y una masa.

$\frac{dz}{dy}y'$ y reemplazando en la ecuacion se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dy}z + w^2 y &= 0 \\
\frac{dz}{dy}z &= -w^2 y \\
\int z dz &= -w^2 \int y dy + C \\
\frac{z^2}{2} &= -w^2 \frac{y^2}{2} + C \\
(y')^2 &= -w^2 y^2 + 2C \\
y' &= \sqrt{2C - w^2 y^2}.
\end{aligned}$$

Usando separación de variables:

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{\sqrt{2C - w^2 y^2}} &= \int dt + \phi \\
\int \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{2C} y^2}} &= \int \sqrt{2C} dt + \phi \\
\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{wy}{\sqrt{2C}}\right) &= \sqrt{2C} t + \phi \\
\frac{wy}{\sqrt{2C}} &= \operatorname{sen}(\sqrt{2C} t + \phi) \\
y &= \frac{\sqrt{2C}}{w} \operatorname{sen}(\sqrt{2C} + \phi)
\end{aligned}$$

con $C, \phi \in \mathbb{R}$ constantes.

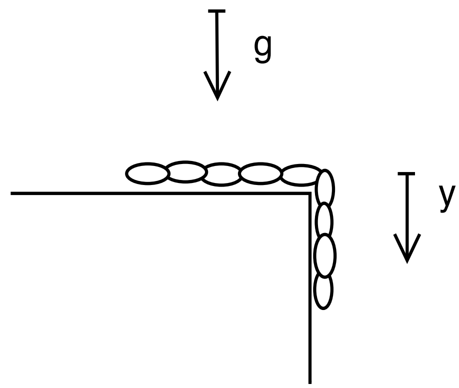

FIGURA 10. Sistema mecánico de una cadena bajo el efecto de g con un extremo cayendo.

EJEMPLO 9.4 (Cadena cayendo). Para el sistema de la segunda figura, el largo de la cadena es L y su densidad es ρ [masa / largo], por lo tanto la EDO que lo describe es

$$\begin{aligned} \rho L y'' &= \rho g y \\ y'' - \frac{g}{L} y &= 0 \end{aligned}$$

definiendo $\sigma = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$ se tiene la EDO $y'' - \sigma^2 y = 0$. Utilizando el mismo cambio de variable, se obtiene que

$$\begin{aligned} z\frac{dz}{dy} - \sigma^2 y &= 0 \\ z\frac{dz}{dy} &= \sigma^2 y \\ \frac{z^2}{2} &= \sigma^2 \frac{y^2}{2} + C \\ z &= \sqrt{\sigma^2 y^2 + 2C} \\ y' &= \sigma\sqrt{y^2 + a^2} \text{ con } a = \frac{2C}{\sigma^2} \\ \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} &= \sigma \int dt \end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $y = a \operatorname{senh}\theta$ en el lado izquierdo,

$$\begin{aligned} \int \frac{a\cosh\theta}{a\cosh\theta} d\theta &= \sigma t + \phi \\ \theta &= \sigma t + \phi \end{aligned}$$

por lo tanto, $y = a \operatorname{senh}(\sigma t + \phi)$, con $\phi \in \mathbb{R}$ constante.

10. Ecuaciones Exactas

Consideremos la familia uniparametrica de curvas

$$f(x,y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Suponiendo que $y = y(x)$, se tiene que

$$f(x,y(x)) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

y derivando esta expresión con respecto a x se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' &= 0 \\ y' &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \end{aligned}$$

Que es una ecuación de primer orden en la variable y.

Definición 10.1. *En vista de lo anterior, diremos que una ecuación diferencial es* exacta *si es de la forma*

$$y' = -\frac{M}{N}$$

donde M y N son tales que existe una función[17] *$f(x,y) \in \mathcal{C}^2$ tal que $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$.*

Se tiene directamente entonces que

Propiedad 10.1. *Si la ecuación es exacta, la solución es la familia $f(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$.*

Hay que buscar criterios para ver si una ecuación es exacta. Uno es

[17] f, sus derivadas parciales y sus segundas derivadas parciales existen y son continuas

PROPIEDAD 10.2. *Sean* M, N *de clase* $\mathcal{C}^1$. *La ecuación* $y' = -\dfrac{M}{N}$ *es exacta si y sólo si* $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $y' = -\dfrac{M}{N}$ es exacta, existe $f(x,y)$ tal que $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, por lo tanto, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Como $f \in \mathcal{C}^2$, se tiene que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Recíprocamente, busquemos $f \in \mathcal{C}^2$ tal que (a) $M = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y (b) $N = \dfrac{\partial f}{\partial y}$. Integrando (a) se tiene que

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + C(y)$$

donde $C(y)$ es una función arbitraria de y independiente de x. Luego, derivando con respecto a y se tiene usando (b) que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N = \int \frac{\partial M}{\partial y}\, dx + C'(y)$$

de donde se puede obtener $C(y)$ (y por lo tanto f) integrando con respecto a y siempre que

$$N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\, dx$$

no dependa de x, esto es, siempre que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \int \frac{\partial M}{\partial y}\, dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

□

EJEMPLO 10.1. Resolver $e^y + (xe^y + 2y)y' = 0$:

$$\begin{aligned} M &= e^y \\ N &= xe^y + 2y \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= e^y \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= e^y \end{aligned}$$

es exacta, se puede aplicar el método de la demostración anterior:

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \int M dx + C(y) \\
f(x,y) &= xe^y + C(y) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= xe^y + C'(y) \\
N &= xe^y + C'(y) \\
xe^y + 2y &= xe^y + C'(y) \\
C'(y) &= 2y \\
C(y) &= y^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f(x,y) = xe^y + y^2 = C$, $C \in \mathbb{R}$ es la familia solución de la ecuación.

En algunos casos, la ecuación $y' = -\frac{M}{N}$ no necesariamente es exacta, sin embargo, puede existir una función $\mu(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $y' = -\frac{\mu(x,y)M}{\mu(x,y)N}$ sí lo sea. Esto sucederá si y sólo si $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$.

Ejemplo 10.2. $y + (x^2y - x)y' = 0$:

$$\begin{aligned}
M &= y \\
N &= x^2y - x \\
\frac{\partial M}{\partial y} &= 1 \\
\frac{\partial N}{\partial x} &= 2xy - 1
\end{aligned}$$

no es exacta, sin embargo, multiplicando la ecuación por $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2}$, se tiene que

$$\frac{y}{x^2} + \frac{x^2y - x}{x^2}y' = 0$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
\mu M &= \frac{y}{x^2} \\
\mu N &= \frac{x^2 y - x}{x^2} \\
\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{1}{x^2} \\
\frac{\partial(\mu N)}{\partial x} &= \frac{1}{x^2}.
\end{aligned}$$

Para simplificar, tratemos de encontrar $\mu = \mu(x)$ que haga exacta la ecuación $y' = -M/N$. Como $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x} = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \dfrac{\partial N}{\partial x}$, y además $\dfrac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x} \\
N\mu' + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) &= 0 \\
\frac{\mu'}{\mu} &= \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} \\
\ln(|\mu|) &= \int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx + C \\
\mu(x) &= k \exp \left(\int \frac{1}{N} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dx \right)
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{R}$. Análogamente, si $\mu = \mu(y)$, se tendría

$$\mu(y) = k \exp \left(- \int \frac{1}{M} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) dy \right).$$