

CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES - MA22A

CLASE AUXILIAR, MARTES 3 DE ABRIL 2007

Problema 1. Caracterización de Conjuntos Abiertos y cerrados.

Sea $(X, \|\cdot\|)$, espacio vectorial normado. Se definió en clases $Int(A)$ y $Adh(A)$, la idea es caracterizar estos conjuntos de maneras alternativas.

Veamos que:

$$\begin{aligned}Int(A) &= \{x \in A : \exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A\} \\&= \text{Abierto mas grande contenido en } A \\&= \bigcup \{V : V \text{ abierto}, V \subset A\} \\Adh(A) &= \{x \in X : \forall \epsilon > 0, \exists y \in A, \|x - y\| < \epsilon\} \\&= \text{Cerrado mas pequeño que contiene a } A \\&= \bigcap \{C : C \text{ cerrado}, A \subset C\}\end{aligned}$$

Se suele notar: $Int(A) = \overset{\circ}{A}$, $Adh(A) = \bar{A}$

Probemos con esto las siguientes propiedades:

Sean $A, B \subset X$ cualquiera:

- i. $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$
- ii. $Int(A) \cup Int(B) \subset Int(A \cup B)$, dé un ejemplo donde no se tiene la igualdad.
- iii. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- iv. $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, dé un ejemplo donde no se tiene la igualdad.
- v. $A \subset B \Rightarrow Int(A) \subset Int(B)$ y $\bar{A} \subset \bar{B}$
- vi. $Int(\bar{A}^c) = (\bar{A})^c$
- vii. $(\bar{A}^c) = Int(A)^c$

Problema 2. Sea (X, d) un espacio métrico. Definamos el diámetro de un conjunto:

$$\delta(A) = \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

Pruebe que:

- (a)
 - i. Si $A \subset B$ entonces $\delta(A) \leq \delta(B)$
 - ii. Si $\delta(A) = 0$ entonces $A = \{x\}$ (un elemento)
 - iii. $\delta(A) = \delta(\bar{A})$
- (b) Considere la distancia de un punto x a un conjunto A como: $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$ y pruebe que si $d(x, A) = 0$ entonces $x \in \bar{A}$

Problema 3. Sea (X, d) espacio métrico donde d satisface la siguiente desigualdad:

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad (1)$$

- i. Probar que si $d(x, y) \neq d(y, z)$ entonces (1) se transforma en igualdad.
- ii. Pruebe que toda bola abierta es a la vez un abierto y un cerrado, y que para cada $y \in B(x, r) : B(x, r) = B(y, r)$
- iii. Pruebe que toda bola cerrada es a la vez un abierto y un cerrado, y que para cada $y \in \bar{B}(x, r) : \bar{B}(x, r) = \bar{B}(y, r)$
- iv. Pruebe que si dos bolas tienen un punto en común, entonces una de ellas contiene a la otra.