MA1B2-**Algebra Lineal**
Profesora: Adriana Piazza
Auxiliar: Sebastián Donoso Fuentes
Clase auxiliar 6

P2.- Sean E, F, G e.v sobre K, $f : E \to F$, $g : F \to G$ aplicaciones lineales.
(i.1) Demuestre que $Ker(g \circ f) = f^{-1}(Kerg \cap Imf)$.
(i.2) Suponga que $E = F = G$, demuestre que si f y g conmutan ($g \circ f = f \circ g$) se tiene:

$$f(Kerg) \subseteq Kerg \ , \ f(Img) \subseteq Img.$$

(ii) Supongamos que E, F, G son de dimensión finita n, p, q respectivamente. Demuestre que:

$$r(f) + r(g) - p \leq r(g \circ f) \leq min(r(f), r(g))$$

$Nota : r(h) = dim(Imh)$, para h una transformación lineal.

Solución:
(i.1) $x \in Ker(g \circ f) \Leftrightarrow g \circ f(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in Kerg \Leftrightarrow f(x) \in Kerg \wedge f(x) \in Imf \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Kerg \cap Imf)$ Podríamos haber llegado a $x \in f^{-1}(Kerg)$ y luego haber argumentado que $f^{-1}(Kerg) = f^{-1}(Kerg \cap Imf)$ puesto que para cualquier función $h : A \to B$ se tiene $f^{-1}(C) = f^{-1}(C \cap Imf)$ $\forall C \subseteq B$.

(i.2)
• $f(Kerg) \subseteq Kerg$ .Sea $y \in f(Kerg) \Leftrightarrow \exists x \in Kerg$ tal que $y = f(x)$. Queremos probar $y \in Kerg$ (i.e) $g(y) = 0$. En efecto $g(y) = g(f(x)) = f(g(x))$, pues por hipótesis f y g conmutaban. Como $x \in Kerg \Leftrightarrow g(x) = 0$, luego $f(g(x)) = f(0) = 0$ esta última igualdad cumpliéndose por ser f lineal. En consecuencia $g(y) = 0$ y entonces $y \in Kerg$.
• $f(Img) \subseteq Img$. Sea $y \in f(Img) \Leftrightarrow \exists x \in Img$ tal que $y = f(x)$.Como $x \in Img, \exists t \in F$ tal que $x = g(t)$.Luego $y = f(g(t)) = g(f(t))$ i.e $y \in Img$.

(ii)
• $r(f) + r(g) - p \leq r(g \circ f)$. Por TNI(Teorema núcleo imagen) tenemos

$$r(f) = dim(Imf) = n - dim(Kerf)$$
$$r(g) = dim(Img) = p - dim(Kerg)$$
$$r(g \circ f) = dim(Im(g \circ f)) = n - dim(Ker(g \circ f))$$

de donde obtenemos $r(f) + r(g) - p = n - dim(Kerf) - dim(Kerg)$ Con esto, notamos que la desigualdad que queremos probar es equivalente a

$$n - (dim(Kerf) + dim(Kerg)) \leq n - dim(Ker(g \circ f)) \Leftrightarrow$$
$$dim(Ker(g \circ f)) \leq dim(Kerf) + dim(Kerg)$$

Probemos esto último. Sea $r = dim(Kerf)$, $q = dim(Kerg \cap Imf) \leq dim(Kerg)$. Tomemos $\{y_1, \ldots, y_r\}, \{x_1, \ldots, x_q\}$ bases de $Kerg \cap Imf$ y $Kerf$ respectivamente. Veremos que una base de $Ker(g \circ f)$ tiene a lo más $r + q$ elementos. Notemos primero que para cada y_i en la base de $Kerg \cap Imf$, $\exists t_i \in E$ tal que $f(t_i) = y_i$ (esto pues los $y_i \in Imf$) Sea $x \in Ker(g \circ f) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(Kerg \cap Imf)$(parte(i)) $\Leftrightarrow f(x) \in (Kerg \cap Imf) \Rightarrow f(x) = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r$ para ciertos

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathcal{K}$. Así, $f(x) = \alpha_1 f(t_1) + \ldots + \alpha_r f(t_r) \Leftrightarrow f(x - (\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_r t_r)) = 0$ y así $x - (\alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_r t_r) = \beta_1 x_1, \ldots, \beta_q x_q$(porque está en el $Kerf$) para ciertos $\beta_i \in \mathcal{K}$. De aquí se concluye $x = \alpha_1 t_1 + \ldots + \alpha_r t_r + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_q x_q$ es decir $Ker(g \circ f) \subseteq < \{t_1, \ldots, t_r, x_1, \ldots, x_q\} >$. Así de ese conjunto se puede extraer una base de $Ker(g \circ f)$ y por supuesto tendrá a lo más $r + q$ elementos.

- $r(g \circ f) \leq min(r(f), r(g))$. Probemos que simultaneamente se tiene $r(g \circ f) \leq r(f)$ y $r(g \circ f) \leq r(g)$. Para la primera desigualdad, basta notar que $f(E) \subseteq F$, con lo cual $g(f(E)) \subseteq g(F)$ y esto implica que $r(g \circ f) = dim(Im(g \circ f)) \leq dim(Img) = r(g)$. Para la segunda, notemos que $Ker(f) \subseteq Ker(g \circ f)$ (Compruebelo ud mismo!).De aquí se deduce $dim(Kerf) \leq dim(Ker(g \circ f))$ y por TNI $n - dim(Imf) = dim(Kerf) \leq dim(Ker(g \circ f)) = n - dim(Im(g \circ f))$ lo cual implica $r(g \circ f) = dim(Im(g \circ f)) \leq dim(Imf) = r(f)$.$\blacksquare$