Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Departamento de Ingeniería Matemática.

Prof: Adriana Piazza.
Aux: Sebastián Donoso.

MA1B2-5. Ejemplos y ejercicios, 6^o semana — 2007

Ejemplos de espacios vectoriales

- El conjunto de las funciones $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, con la suma de funciones y la multiplicación por escalar dadas por:

$$\begin{aligned} \forall f, g \in \mathcal{F}, \qquad & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, f \in \mathcal{F}, \qquad & (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \end{aligned}$$

  es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

- El grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.
- El grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$ es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$.
- El grupo abeliano $(\mathbb{R}, +)$ **no** es espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$. ¿por qué?
- $V = (\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ con la ley de composición interna

$$(a,b) \dot{+} (c,d) = (ac, bd) \qquad \forall (a,b), (c,d) \in V$$

  y la ley de composición externa

$$\alpha * (a,b) = (a^\alpha, b^\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall (a,b) \in V$$

  es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

- Sea

$$V = \left\{ M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) / M_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases} \right\}$$

  con la suma de matrices y multiplicación por escalar usuales. Demuestre que $(V, +)$ es un e.v. sobre $\mathbb{R}$.

Ejemplos de subespacios vectoriales

- $\{0\}$ es s.e.v. de V (en cualquier espacio vectorial)
- Sea $V = (\mathbb{R}^2, +)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y la multiplicación por escalar usuales.
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $x = (1,1)$?
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $x = (1,1)$ e $y = (-1,1)$?
- Sea $V = (\mathbb{R}^3, +)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con la suma y la multiplicación por escalar usuales.
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño?
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $e_1 = (1,0,0)$?
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $e_1 = (1,0,0)$ y $e_2 = (0,1,0)$?
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$?
  - ¿Cual es el subespacio vectorial más pequeño que contiene a $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ y $z = (1,1,0)$?
- Demuestre que el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, es s.e.v. de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- Demuestre que $W = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) / p(1) = 0\}$ es s.e.v. de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.
- Sea $V = \left\{ M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) / M_{ij} = \begin{cases} a & i = j \\ b & i \neq j \end{cases} \right\}$ con la suma de matrices y multiplicación por escalar usuales. Demuestre que $(V, +)$ es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.