Universidad de Chile. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas. Departamento de Ingeniería Matemática.

Prof: Adriana Piazza.
Aux: Sebastián Donoso.

MA1B2-5. Ejemplos y ejercicios, 5^o semana — 2007

Ejemplos y algunas propiedades adicionales del producto cruz o producto vectorial
Algunas de las propiedades que aparecen aquí no están en el apunte. Si bien, no tienen que aprenderlas y recordarlas, el ejercicio de hacer la demostración es útil para familiarizarse con el producto cruz y aprender a trabajar con él.

- $\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k}$, $\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$, $\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath}$.
- $\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$.
- $x \times y = 0 \iff x \parallel y$.

  Caso particular $x \times x = 0$.
- No es asociativo. Contraejemplo $\quad -\hat{\jmath} = \hat{\imath} \times (\hat{\imath} \times \hat{\jmath}) \neq (\hat{\imath} \times \hat{\imath}) \times \hat{\jmath} = 0$
- No es concelativa: $x \times y = x \times z$ **no implica** $y = z$.
- Sin embargo, las dos condiciones simultáneas $\left.\begin{array}{r} x \times y = x \times z \\ \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow y = z$

Producto caja, producto mixto ó triple producto escalar Se define $[x, y, z] = \langle x \times y, z\rangle$.
Algunas de sus propiedades son

- $[x, y, z] = [y, z, x] = [z, y, x] = -[y, x, z] = -[x, z, y] = -[z, y, x]$
- $[x, x, y] = [x, y, x] = [y, x, x] = 0$

Problema 1) Sean L_1 y L_2 rectas no paralelas en $\mathbb{R}^3$:

$$L1) \quad V = P + \lambda d_1 \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad L2) \quad V = Q + \mu d_2 \quad \mu \in \mathbb{R}$$

(i) Demuestre que $L_1 \cap L_2 \neq \phi \iff \langle P - Q, d_1 \times d_2\rangle = 0$. (Recuerde que $d_1 \nparallel d_2$). Interprete geométricamente.

(ii) Si $L_1 \cap L_2 = R$, demuestre que

$$R = P + \frac{\langle (P - Q) \times d_2, d_2 \times d_1\rangle}{\|d_1 \times d_2\|^2}\, d_1 = Q + \frac{\langle (P - Q) \times d_1, d_2 \times d_1\rangle}{\|d_1 \times d_2\|^2}\, d_2$$

(iii) La distancia entre dos conjuntos se define como $\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{\operatorname{dist}(v_1, v_2)/v_1 \in A, v_2 \in B\}$.
Si $L_1 \cap L_2 = \phi$, demuestre que la distancia entre las rectas es

$$\operatorname{dist}(L_1, L_2) = \frac{|\langle (P - Q), d_1 \times d_2\rangle|}{\|d_1 \times d_2\|}$$

Observe que si $L_1 \cap L_2 \neq \phi$ la fórmula anterior da cero, lo que es coherente.

(iv) Encuentre la ecuación de la perpendicular común a L_1 y L_2, (recta que intersecta a L_1 y L_2 y es perpendicular a ambas).

(v) Calcule la distancia entre L_1 y L_2 y encuentre la perpendicular común cuando

$$L_1) \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R} \qquad L_2) \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mu \in \mathbb{R}$$