Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.

Prof: Adriana Piazza.
Aux: Sebastián Donoso.

MA1B2-5. Ejercicios, 3 semana, 2 clase — 2007

1) Resuelva completamente el siguiente sistema lineal, considerando todos los valores que pueden tomar $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{cccccccc} \beta x_1 & -\beta x_2 & -\beta x_3 & -\beta x_4 & -\beta x_5 & = & 0 \\ \alpha x_1 & +\alpha x_2 & +\alpha x_3 & +\alpha x_4 & & = & \alpha \\ \alpha x_1 & +\alpha x_2 & +\alpha x_3 & & & = & 0 \\ \beta x_1 & -\beta x_2 & & & & = & \alpha \\ & & & & \gamma x_5 & = & 0 \end{array}$$

Sugerencia: Escriba el sistema en su forma matricial. Escalone la matriz. Podrá observar, por ejemplo, que el sistema tiene solución única ssí $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ y $\gamma \neq 0$. Resuelva ese caso y *todos los demás.* Observe la relación que existe entre el largo de los peldaños de la matriz escalonada y el número de variables libres de la solución.

2) Encuentre la descomposición LDU de las siguientes matrices:

$$(a) \qquad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & & & 0 \\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & 0 & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Resolución 2)(a): $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$$E_{12}(\tfrac{-1}{4},1)A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \longrightarrow E_{23}(\tfrac{-4}{15},1)E_{12}(\tfrac{-1}{4},1)A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$$\Rightarrow A = \left(E_{23}(\tfrac{-4}{15},1)E_{12}(\tfrac{-1}{4},1)\right)^{-1}\tilde{A} = E_{12}(\tfrac{1}{4},1)E_{23}(\tfrac{4}{15},1)\tilde{A} = E_{12}(\tfrac{1}{4},1)E_{23}(\tfrac{4}{15},1)\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tiene

$$L = E_{12}(\tfrac{1}{4},1)E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{15}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{56}{15} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{15} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifique que $A = LDU$.

Erratas de la Guía Semana 2.

P2.(a)(2) Las matrices A y B son simétricas.

P2.(c) $A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}$