Complementos C3 Algebra lineal Parte 2

Profesor: María Leonor Varas

Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

Si tengo n vectores en $\mathbb{R}^n$. ¿Cómo saber si son o no l.i.?

Considere $\{v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Queremos ver si ese conjunto es l.i. o l.d..

Como Uds los están pensando, se pueden usar los mismos métodos vistos para el control 2 (mire *complementos-c2.pdf*).

Pero ahora debemos aprovecharnos de que la matriz que tiene a los n vectores como columnas, es decir,

$$A = [v_1 \quad \dots \quad v_n]$$

es cuadrada.

En este caso se cumple la siguiente propiedad:

$$\text{Los } n \text{ vectores son l.i.} \Leftrightarrow A \text{ es invertible}$$

Entonces puede usar todo lo que sabe sobre matrices invertibles, en particular que

$$A \text{ es invertible} \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$$

Conclusión: Si $\det(A) \neq 0$ entonces los n vectores son l.i., en caso contrario son l.d..

OBS: También le sirve construir la matriz cuyas filas son los vectores:

$$A = \begin{bmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{bmatrix}$$

que también es cuadrada, por lo tanto, puede usar el mismo procedimiento anterior.

Si me dan ciertos datos, ¿cómo encuentro una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$?

Si conozco los valores de A para una base de $\mathbb{R}^n$

Primero, observe que si ud calcula, para e_i el i -ésimo vector propio de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, lo siguiente

$$Ae_i = A_{\bullet i}$$

se obtiene la i -ésima columna de A ¹.

Por lo tanto si ud averigua cuánto vale $Ae_i, \forall i$ entonces conocerá A .

Para calcular Ae_i , escriba el vector e_i en función de la base dada.

Con esto, como ud conoce los valores de Ab_i , con b_i un elemento de la base conocida, entonces podrá calcular fácilmente Ae_i .

Si A es diagonalizable y conocemos sus valores y vectores propios.

Sabemos que si $v_1, \dots, v_n$ son los vectores propios de A (asociados a los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente), entonces, éstos forman una base de $\mathbb{R}^n$ (definición de matriz diagonalizable). Por lo tanto, puede remitirse al mismo caso anterior.

Pero, lo más conveniente es usar que A se puede escribir como:

$$A = PDP^{-1}$$

donde

$$P = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Tanto P como D los obtiene automáticamente. La única dificultad es calcular la inversa P^{-1} (materia de los controles anteriores).

Entonces A se calcula simplemente multiplicando las matrices P, D y P^{-1} .

¹En general, $Ax = x_1A_{\bullet 1} + x_2A_{\bullet 2} + \dots + x_nA_{\bullet n}$