

Clase Auxiliar Algebra Lineal 8 Noviembre 2007

Profesor: María Leonor Varas

Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P1 Resuelva los siguientes miniejercicios

- a) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^t = A^{-1}$. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}^n \|Ax\| = \|x\|$.
HINT: Use propiedades del producto punto con matrices y sus traspuestas.
- b) Para la misma matriz A , demuestre que los valores propios de A tienen módulo 1 (es decir, si λ es vp de A , entonces $|\lambda| = 1$).
HINT: es tan trivial que no merece *HINT*.
- c) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Determine todos los valores $a \in \mathbb{R}$ tal que A es una matriz diagonalizable.
HINT: Calcule los valores y vectores propios de A en función de a . Observe con atención las dimensiones algebraicas y geométricas correspondientes a cada caso y concluya.
- d) Considere $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la proyección ortogonal de u_3 sobre el espacio $U_{1,2} = \langle \{u_1, u_2\} \rangle$. *HINT:* Encuentre una base ortonormal de $U_{1,2}$ y ocupe la proposición 6.2 de la tutoría asociada a la semana 12.

- P2** a) Sea $A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$. Se sabe que A es simétrica y que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es vector propio de A asociado al valor propio 2, y además la dimensión del $\text{Ker}(T)$ es igual a 2. Calcular A .
- b) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene $\langle Ax, x \rangle \geq 0$. Probar que los valores propios de A son todos reales mayores o iguales que cero.

P3 Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Demuestre que:

- a) λ es valor propio de A asociado al vector propio v si y sólo si $(1 + \lambda)$ es valor propio de $(I + A)$ asociado al vector propio v .
- b) A es semi-definida positiva si y sólo si todos los valores propios de A son mayores o iguales a cero.
- c) Si A es semi-definida positiva entonces $(I + A)$ es definida positiva.

- P4** a) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Pruebe que existe $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que $A = B^T B$ si y sólo si A es simétrica y definida positiva. Concluya que si A es simétrica definida positiva, entonces existen $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $A_{i,j} = \langle v_i, v_j \rangle$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$
- b) Sean $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ simétricas. Demuestre que si A es definida positiva y B es semi-definida positiva entonces $A + B$ es definida positiva.
- c) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica e invertible. Demuestre que A^2 es simétrica definida positiva.
- P5** Considere $\{v_1, v_2\}$ un conjunto ortonormal de vectores columna en $\mathbb{R}^n$ y definamos la matriz V de $n \times 2$ cuyas columnas son v_1 y v_2 , es decir $V = [v_1 v_2]$. Sea

$$A = I - aVV^t$$

donde a es un parámetro real, $a \neq 0$ e I es la matriz identidad de $n \times n$.

- a) Pruebe la fórmula

$$VV^t x = \langle x, v_1 \rangle v_1 + \langle x, v_2 \rangle v_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- b) Muestre que los valores propios de A son 1 y $(1 - a)$ y determine la dimensión del espacio propio asociado a cada uno de ellos. Justifique que A es diagonalizable.
- c) Encuentre los valores de $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tales que A es definida positiva

- P6** Sea M una matriz de $n \times n$ con coeficientes reales, simétrica y definida positiva. Considere la forma cuadrática

$$Q(x) = x^t M x, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Pruebe que si A es una matriz de $n \times n$ tal que $Q(Ax) = Q(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces A es invertible y $Q(A^{-1}x) = Q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

HINT: Considere el núcleo (o Ker) de A .

- P7** Estudie mucho. La próxima semana hay control. Cualquier duda nos ubican por mail, ucursos o (si tiene suerte) en algún lugar de la facultad.