Clase Auxiliar Algebra Lineal 25 Octubre 2007

Profesor: María Leonor Varas
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P1 Diga cuales de las siguientes matrices son diagonalizables y, si es así, diagonalice.

i) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ii) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$

iii) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

iv) $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

P2 a) Sea $A \in M_{3\times 3}(I\!R)$ no invertible, simétrica tal que

$$Ker(A+I) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

i) Demuestre que los valores propios de A son 0 y -1.

ii) Demuestre que $Ker(A) = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

b) Sean $k, n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$ tal que $A^{k-1} \neq 0$ y $A^k = 0$. Demuestre que 0 es el único valor propio de A y concluya que A no es diagonalizable.

c) Sea $n > 1$. Sea $A \in M_{n\times n}(I\!R)$. Demuestre que si A es diagonalizable entonces $Ker(A^2) \subseteq Ker(A)$

P3 Revise y re-resuelva la gran cantidad de ejercicios de conjunto ortogonal que se han visto en auxiliares anteriores.

$\boxed{\textbf{P4}}$ Sea $V = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

a) Calcular una base ortonormal de V y calcular su dimensión.
b) Calcular una base de $V^{\perp}$

$\boxed{\textbf{P5}}$ Sea $W = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle$

a) Obtenga una base de W.
b) Ortonormalice la base encontrada en a)
c) Encuentre una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga a la base encontrada en b).

$\boxed{\textbf{P6}}$ Sea $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ y $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal tal que $T(x) = \langle v, x \rangle\, v$.

a) Pruebe que $Im(T) = \langle \{v\} \rangle$ y que $Ker(T) = \langle \{v\} \rangle^{\perp}$.
b) Pruebe que $dim\,(Ker(T)) = n - 1$.
c) Sea $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de $\langle \{v\} \rangle^{\perp}$. Pruebe que $v_1, \ldots, v_{n-1}$ son vectores propios de T asociados al valor propio 0.
d) Pruebe que T es diagonalizable, i.e., que existe una base de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios de T.

Estrategia que nunca falla para responder a la pregunta: ¿es A diagonalizable?

Pregunta: ¿Es $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ diagonalizable?

a) Mire la matriz. Si es simétrica entonces **es diagonalizable**. Si no lo es vaya directo al paso b.

b) Calcule $|A - \lambda I|$ y sus raices. Si hay raices complejas **A no es diagonalizable**. Si no hay raices complejas pase a c.

c) Si las n raices reales son distintas entonces **A es diagonalizable**. Si no es así, vaya al paso d.

d) Para las raíces repetidas resuelva el sistema $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$. Obtenga la dimensión del espacio solución ($mg(\lambda)$) y compárela con $ma(\lambda)$.

   Si $mg(\lambda) < ma(\lambda)$ (para alguno de los lambda) entonces **A no es diagonalizable**. Si $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ para todos los λ entonces **A es diagonalizable**.