Clase Auxiliar Algebra Lineal 18 Octubre 2007

Profesor: María Leonor Varas
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

P1 Considere E un *ev* de dimensión n y considere una base $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Se definen, $\forall\ i = 1, \ldots, p$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_j$$

donde los α_{ij} satisfacen: $j < i \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$ y $\forall\ i = 1, \ldots, p,\ \alpha_{ii} \neq 0$. Pruebe que $\beta = \{b_1, \ldots, b_n\}$ es un conjunto li.

P2 Considere $V = \{(s_n)_{n \in I\!N},\ \textit{sucesion real}\ :\ s_{n+2} = s_{n+1} + s_n\}$.

a) Demuestre que V es *sev* del espacio vectorial de las sucesiones reales.

b) Encuentre una base de V e indique su dimensión.
HINT: Fíjese que si $(s_n) \in V$, entonces (s_n) sólo depende de s_0 *y* s_1.

P3 Sean U, V sev de $I\!R^n$. Demuestre que

a) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$

b) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

c) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$

d) $U \oplus V = I\!R^n \Leftrightarrow U^{\perp} \oplus V^{\perp} = I\!R^n$

P4 Sean $T, S : I\!R^n \to I\!R$ transformaciones lineales. Pruebe que:

$$\mathbb{K}er(T) \subseteq \mathbb{K}er(S) \Rightarrow \exists\ \alpha \in I\!R,\ tq\ S = \alpha T$$

HINT: una forma de hacerlo es utilizando Matrices Representantes.

P5 Sea $T : I\!R^4 \to I\!R^4$ una transformación lineal tal que

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad y \quad T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Encuentre T si, por añadidura, se sabe que $\mathbb{K}er(T) = \mathbb{I}m(T)$.

HINT: Encuentre primero los valores de T sobre una base de $I\!R^4$.

P6 Considere $T : M_{2\times 2}(I\!R) \to M_{2\times 2}(I\!R)$ definida por $T(A) = \frac{A+A^t}{2}$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Encuentre $\mathbb{K}er(T)$ y calcule $rango(T)$.

c) Considere la siguiente base de $M_{2\times 2}(I\!R)$:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Calcule la matriz representante de T cuando la base del espacio de partida y de llegada es β.

d) Usando matrices de pasaje (o de cambio de base) encuentre la matriz representante de T cuando en el espacio de partida y de llegada considera la base canónica.

P7 Sea E un *ev* sobre $\mathbb{K}$. Sean V, W *sev* de E tal que $V \cap W = \phi$ y $S : V \to W$ una transformación lineal. Se define $T : V \oplus W \to W$ como

$$T(x) = x_w + S(x_v), \quad donde\ x = x_v + x_w,\ con\ x_v \in V, x_w \in W$$

a) Pruebe que T es lineal.

b) Si $\beta_v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ y $\beta_w = \{w_1, \ldots, w_m\}$ son bases de V y W, respectivamente, demuestre que $\beta_{vw} = \beta_v \cup \beta_w$ es base de $V \oplus W$.

c) Si se sabe que A_S es la matriz representande de S con respecto a las bases β_v y β_w, calcule la matriz representante de T con respecto a las bases β_{vw} y β_w.

d) Pruebe que $\{v_1 - S(v_1), \ldots, v_n - S(v_n)\}$ es base de $\mathbb{K}er(T)$.

e) Muestre que T es sobreyectiva. *HINT*: use TNI.

P8

a) Su perro, un estudiante dedicado, ha calculado matrices representante toda la semana. Notoriamente preocupado se acerca a usted y le muestra una matriz representante que tiene una columna completamente conformada por ceros. ¿Cómo tranquiliza a su perro?

b) A pesar de la duda, su perro no ha decaído en su estudio. Luego de un rato le muestra extrañado una matriz representante que tiene una fila completamente conformada por ceros. ¿Qué puede decirle a su perro?

c) Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Usted sabe que 1 y -3 son valores propios de T y que sus vectores propios correspondientes son $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la definición de T.