Clase Auxiliar Algebra Lineal 11 Octubre 2007

Profesor: María Leonor Varas
Auxiliares: Sebastián Astroza & Diego Morán

$\boxed{\textbf{P1}}$ Encuentre los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{P2}}$ Sean x, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y considere la matriz $A = x \cdot y^t \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Demuestre que x es $\vec{vp}$ de A.

b) Suponga que $< x, y > \neq 0$ y calcule todos los valores propios de A.

c) Suponga que $< x, y >= 0$. Sea $S = \langle\{y\}\rangle^{\perp}$ y considere una base de S de la forma $\{x, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$.

Sea $\beta = \{x, v_2, \ldots, v_{n-1}, y\}$. Calcule $[A]_{\beta\beta}$.

$\boxed{\textbf{P3}}$ Sea V un e.v. sobre el cuerpo K con $dim(V) = n$. Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Sea $T : V \to V$ lineal. Pruebe que:

a) 0 *es valor propio de* $T \Leftrightarrow T$ *no es invertible.*

b) si T es invertible entonces

$$\lambda \textit{ es valor propio de } T \Leftrightarrow \lambda^{-1} \textit{ es valor propio de } T^{-1}$$

c) Supongamos ahora que:

$$\begin{array}{rcl} T(v_1) & = & 0 \\ T(v_2) & = & a_{21}v_1 \\ T(v_3) & = & a_{31}v_1 + a_{32}v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T(v_n) & = & a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn-1}v_{n-1} \end{array}$$

Pruebe que $T^n = 0$.

$\boxed{\textbf{P4}}$ Encuentre los valores y vectores propios de la siguiente matriz:

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

P5 Algunos ejercicios básicos y no tanto:

a) Con respecto a las matrices representantes, ¿Dependen éstas del orden que uno elija para los elementos de las bases?

b) Sea E un ev de dimensión finita y $T : E \to E$ función lineal. Pruebe que:

$$E = \mathbb{K}er(T) \oplus \mathbb{I}m(T) \Leftrightarrow \mathbb{K}er(T^2) = \mathbb{K}er(T)$$

HINT: Recuerde que "$= \Leftrightarrow \subseteq \wedge \supseteq$". Para $\Rightarrow$ use: $\mathbb{K}er(T^2) \subseteq E$ y que si $T^2(x) = 0$ entonces $T(x) \in \mathbb{K}er(T)$. Para $\Leftarrow$ acuérdese del TNI y de la fórmula para $dim(U + V)$.

P6 Un estudiante de Ingeniería le muestra a Ud (estudiante de InJeniería) una hoja de papel con lo siguiente escrito:

$$det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right) = 7$$

Como Ud. se sabe "al dedillo" las propiedades de determinante, se las comenta orgullosamente a su colega. Pero lamentablemente, para su orgullo de mechón, éste no queda conforme. Demuéstrele que Ud será un excelente InJeniero, calculando los siguientes determinantes:

(a) $det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ a+g & b+h & c+i \end{bmatrix}\right)$ (b) $det\left(\begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ 3g & 3h & 3i \end{bmatrix}\right)$

(c) $det\left(\begin{bmatrix} a & g-d & a+2g \\ b & h-e & b+2h \\ c & i-f & c+2i \end{bmatrix}\right)$ (d) $det\left(2\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right)$

P7 Aún sorprendido con las habilidades que posee un mechón de InJeniería, el otro estudiante decide someterlo a un test, prometiendo que si Ud. lo resuelve correctamente antes de las 10:00 AM, él se cambiará de universidad. El Test es el siguiente:

Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

a) Suponga que A es una matriz *idempotente*, es decir, $A^2 = A$. Encuentre todos los valores posibles que puede tomar $det(A)$.

HINT: Encuentre y resuelva una ecuación en la variable $det(A)$.

b) Pruebe que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad det(\lambda A) = \lambda^n det(A)$.

HINT: Utilice n veces la propiedad 1 de la Proposición 5.2 que aparece en la Tutoría de la semana 10. Otra forma de hacerlo es usando la definición de determinante.