# Pauta: Matrices Estocásticas

**Algebra Lineal, sección 1 - Semestre de Primavera, 2007**

1. Sean $v, P$ un vector y una matriz con todas sus entradas positivas. Demuestre que $v$ es un vector de probabilidad si y sólo si $v^T\mathbf{1} = 1$, y que $P$ es estocástica si y sólo si $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

   [$\Longrightarrow$] Sea $v$ un vector de probabilidad. Entonces $v^T\mathbf{1} = \sum_j v_j = 1$.

   [$\Longleftarrow$] Sabemos que $v$ tiene todas sus entradas positivas, por lo tanto para ver que es vector de probabilidad sólo resta verificar que la suma da 1, lo cual es directo pues como ya mencionamos, $\sum_j v_j = v^T\mathbf{1}$.

   [$\Longrightarrow$] Llamemos $w$ al producto $P\mathbf{1}$. Se tiene que $w_j = \sum_k p_{jk}\mathbf{1}_k = \sum_k p_{jk} = 1$ pues $P$ es estocástica. Como esto vale para cualquier $j$, se concluye que $w = \mathbf{1}$.

   [$\Longleftarrow$] Sabemos que $P$ tiene todas sus entradas positivas, por lo tanto para probar que $P$ es estocástica sólo falta verificar que cada fila suma 1. En efecto, la suma de los coeficientes de la fila $i$ es $\sum_j p_{ij} = \sum_j p_{ij}\mathbf{1}_j = (P\mathbf{1})_i = \mathbf{1}_i = 1$.

2. Demuestre que $P$ es doblemente estocástica si y sólo si $P$ y $P^T$ son estocásticas, y concluya que si $P$ es simétrica y estocástica entonces es doblemente estocástica.

   [$\Longrightarrow$] Es claro de la definición que $P$ doblemente estocástica implica $P$ estocástica. También, notando que las filas de $P^T$ son las columnas de $P$, la doble estocasticidad de $P$ implica que las filas de $P^T$ suman 1, o sea $P^T$ también es estocástica.

   [$\Longleftarrow$] Como $P$ es estocástica, falta verificar que sus columnas suman 1 para que sea doblemente estocástica. Pero, dada una columna $j$ cualquiera, $\sum_i p_{ij} = \sum_i (P^T)_{ji} = 1$ pues $P^T$ es estocástica.

   Si $P$ es estocástica y simétrica entonces $P^T$ también es estocástica pues $P^T = P$, y concluimos que $P$ es doblemente estocástica por la equivalencia recién demostrada.

3. Sea $v$ un vector de probabilidad. ¿Qué condición sobre $P$ permite demostrar que $Pv$ también es vector de probabilidad?

   Notemos que $Pv$ es un vector con todas sus entradas positivas, luego aplicando la parte (1) bastaría probar que $(Pv)^T\mathbf{1} = 1$. Notando que $(Pv)^T\mathbf{1} = v^T(P^T\mathbf{1})$ y recordando que $v^T\mathbf{1} = 1$, una condición suficiente es que $P^T$ sea estocástica (o también una condición más restrictiva, que sería $P$ doblemente estocástica), con lo cual se tendría que $P^T\mathbf{1} = \mathbf{1}$ y se completaría la demostración.

4. Dé ejemplos de matrices $P$ que sean estoćasticas e invertibles, tales que (i) $P^{-1}$ no sea estocástica, y (ii) $P^{-1}$ sea estocástica.

   (i) $P = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$, cuya inversa es $\begin{bmatrix} 1/4 & -3/4 \\ -3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$ que no es estocástica pues posee coeficientes negativos

   (ii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, que es autoinvertible

$$M = \begin{bmatrix} 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma \end{bmatrix}$$

1. Muestre que $M$ es estocástica, y que si $\alpha = \gamma$ entonces $M$ es doblemente estocástica.

   La suma de los valores en cada fila es $\alpha+\beta+\gamma+(1-\alpha-\beta-\gamma) = 1$, luego $M$ es estocástica. Lo mismo ocurre en cada columna, así que $M$ es doblemente estocástica en realidad sin requerir ninguna condición sobre $\alpha, \beta, \gamma$.

2. Asuma que $\alpha = \beta = \gamma$, con lo que la matriz $M$ queda de la forma

$$M = \begin{bmatrix} 1-3\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-3\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-3\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha \end{bmatrix}$$

   Escalonando $M$, determine los valores de $\alpha$ tales que $M$ sea invertible. Hint: Permute la fila 1 de $M$ con alguna otra antes de comenzar a escalonar.

   Permutaremos las filas 1 y 4, con lo que nos queda

$$\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha \\ \alpha & 1-3\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-3\alpha & \alpha \\ 1-3\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

   Notemos que en el caso en que $\alpha = 0$, entonces $M$ es la matriz identidad y por lo tanto es invertible, así que centraremos nuestro análisis en el caso $\alpha \neq 0$. Escalonamos entonces la matriz aumentada $[A|\mathbf{I}]$ (para ganar tiempo cuando tengamos que calcular $A^{-1}$) aplicando las operaciones elementales $E_{1,2}(-1)$, $E_{1,3}(-1)$ y $E_{1,4}(\frac{3\alpha-1}{\alpha})$, lo que da

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-4\alpha & 0 & 4\alpha-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha & 4\alpha-1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4\alpha-1 & 4\alpha-1 & \alpha-\frac{(1-3\alpha)^2}{\alpha} & 1 & 0 & 0 & \frac{3\alpha-1}{\alpha} \end{array}\right]$$

   recordando que inicialmente habíamos permutado las filas 1 y 4. Aplicamos ahora $E_{2,4}(+1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-4\alpha & 0 & 4\alpha-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha & 4\alpha-1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4\alpha-1 & 5\alpha-\frac{(1-3\alpha)^2}{\alpha}-1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3\alpha-1}{\alpha}-1 \end{array}\right]$$

   y por último aplicamos $E_{3,4}(+1)$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-4\alpha & 0 & 4\alpha-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha & 4\alpha-1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9\alpha-\frac{(1-3\alpha)^2}{\alpha}-2 & 1 & 1 & 1 & \frac{3\alpha-1}{\alpha}-2 \end{array}\right]$$

lo que, simplificando las expresiones, queda

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-4\alpha & 0 & 4\alpha-1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-4\alpha & 4\alpha-1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\alpha-1}{\alpha} & 1 & 1 & 1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} \end{array}\right]$$

de donde concluimos que $M$ será invertible si $\alpha \neq 1/4$.

3. Si $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, calcule la inversa de $M$.

   Reemplazando $\alpha = 1/3$ en la última matriz aumentada del desarrollo anterior, obtenemos

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

   Continuamos el proceso de escalonamiento hacia arriba para encontrar $A^{-1}$, pero primero aplicaremos $E_1(+3)$, $E_2(-3)$ y $E_3(-3)$ (ponderaremos cada fila por un valor de modo que quede 1 en la diagonal)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

   y aplicamos ahora $E_{4,2}(+1)$ y $E_{4,3}(+1)$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

   y para finalizar, $E_{3,1}(-1)$ y $E_{2,1}(-1)$. Así, hemos obtenido que $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

4. Suponga que $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ (esto modela una situación en donde el camión debe viajar todos los días, con igual probabilidad a cada ciudad).

   *a*) Denote por $\mathbf{I}$ a la matriz identidad y por $J$ a la matriz cuyas componentes valen todas 1, ambas de dimensión $4 \times 4$. Demuestre que para todo $n \geq 0$,

$$M^n = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cdot \mathbf{I}$$

   Por inducción sobre $n$. Caso base $n = 0$, tenemos que ambos lados dan la identidad, así que la igualdad se cumple.

Supongamos que la igualdad vale para un $n \geq 0$ cualquiera. Notando que podemos escribir $M = \frac{1}{3}(J - \mathbf{I})$, nos queda que

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= M^n \cdot M \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cdot \mathbf{I}\right)(J - \mathbf{I}) \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right] J^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} J - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} \cdot \mathbf{I}
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $J^2 = 4J$, con lo cual

$$\begin{aligned}
M^{n+1} &= \frac{1}{3}J - \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} \cdot \mathbf{I} \\
&= \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1} \cdot \mathbf{I}
\end{aligned}$$

y se concluye la demostración.

*b*) Si un día dado el camión se encuentra en la ciudad $j$, la probabilidad de que después de $n$ días esté en la ciudad $i$ se puede calcular como $p = e_i^T M^n e_j$. Usando la parte anterior demuestre que, sin importar la ciudad $j$ donde se encuentre el camión hoy, la probabilidad de encontrarlo en una ciudad dada $i$ converge a $1/4$ cuando $n \to \infty$.

Notando que $p = (M^n)_{ij}$, utilizamos la parte anterior para obtener que

$$p = \left(\frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cdot \mathbf{I}\right)_{ij} = \frac{1}{4}\left[1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^n\right] + \left(\frac{-1}{3}\right)^n \cdot \delta_{ij}$$

donde $\delta_{ij}$ es el elemento correspondiente de la matriz identidad. De aquí, es directo que $p$ converge a $1/4$ cuando $n \to \infty$.

DVD