Pextra, semana 6 (espacios y subespacios vectoriales).

1. Considere el conjunto
$$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$
el cual se sabe que es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

    a) Demuestre que
    $$\mathcal{E}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es derivable } \wedge (\forall t \in \mathbb{R})\ f'(t) = 9f(t)\}$$
    es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

    b) Considere
    $$\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es un polinomio}\}$$
    el cual sabemos que es espacio vectorial (y por lo tanto, subespacio de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$). Demuestre que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}) = \{\mathbf{0}\}$, donde $\mathbf{0}$ representa a la función nula. *Hint*: Piense en qué le ocurre al grado de un polinomio al derivarlo.

2. Sea $a \in \mathbb{R}$ un valor fijo. Considere en $\mathbb{R}^3$ la recta $L : x = \begin{pmatrix} -5a \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y el plano $\Pi : \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$

    a) Dado un punto $z \in \mathbb{R}^3$ cualquiera, demuestre que su proyección sobre Π es el punto
    $$\pi(z) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 - z_3 \\ -z_1 + 2z_2 - z_3 \\ -z_1 - z_2 + 2z_3 \end{pmatrix}$$

    b) Note que Π es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$. Encuentre el valor que debe tener a para que el conjunto $L' = \{\pi(x) \mid x \in L\}$ sea un subespacio vectorial de Π.