

P3, semana 5.

(a) El eje de las x se puede describir como la recta que pasa por el origen y tiene dirección $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, con lo cual nos queda

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Además, sabemos que podemos elegir el vector director de L_2 como la resta de los dos puntos que nos entregan, así que tenemos la ecuación vectorial de L_2

$$L_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como L_3 debe ser perpendicular a ambas rectas, elegiremos su vector director d calculando

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

con lo que tomamos $d = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Llamemos $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ al punto de apoyo que usaremos para L_3 . Como L_3 intersecta a L_1 , deben existir un μ y un α tales que

$$P + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Reescribiendo esto componente a componente, nos queda

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha \\ p_2 + \mu &= 0 \\ p_3 + \mu &= 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos que $p_2 = p_3$.

Como L_3 también intersecta a L_2 , deben existir un μ' y un β tales que

$$P + \mu' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y reescribiendo componente a componente:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + 2\beta \\ p_2 + \mu' &= 2 - \beta \\ p_3 + \mu' &= \beta \end{aligned}$$

Restando las últimas dos ecuaciones, nos queda que $\beta = 1$, y reemplazando esto en la primera entonces $p_1 = 3$. De este modo, quedamos en que $P = \begin{pmatrix} 3 \\ p_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$. ¿Cómo despejar la variable faltante? Es importante

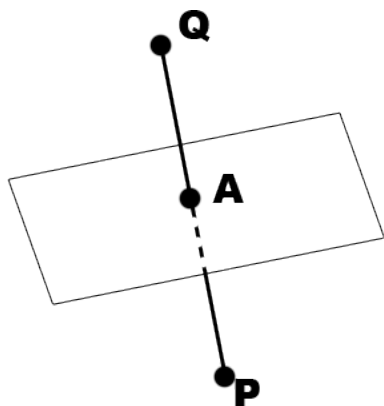
recordar que estamos buscando un punto *cualquiera* de la recta L_3 , y ésta tiene infinitos puntos posibles (al trasladar en múltiplos del vector director). Por lo tanto, cualquiera de ellos nos sirve. Observemos que

$$P = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + p_2 \cdot d$$

y por lo tanto P está determinado salvo una traslación en la dirección del vector director (lo cual es lo máximo que podemos esperar). Elegimos entonces $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ como punto de apoyo, con lo que nos queda

$$L_3 : \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Tenemos $\Pi : x + y + z = 1$ y $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Llamemos Q al punto reflejado de P respecto a Π y sea A el punto donde el trazo que une a P y Q corta a Π .



Notemos que, siendo Q el reflejo de P , A resulta ser el punto medio entre P y Q , entonces $A = \frac{1}{2}(P + Q)$. De aquí obtenemos que $Q = 2A - P$.

¿Cómo calcular el punto A ? Notar que el trazo que une P y Q debe ser perpendicular a Π , por lo tanto A se puede calcular como la

proyección de P (o de Q) sobre Π . Es decir, el punto $A = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

debe cumplir: (1) $A \in \Pi$, y (2) $(P - A) \perp \Pi$.

De la condición (1) obtenemos que $a + b + c = 1$, de donde podemos

despejar $a = 1 - b - c$ y llevamos que $A = \begin{pmatrix} 1 - b - c \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

De la condición (2) concluimos que $(P - A)$ es normal a Π , es decir $(P - A)$ es múltiplo de $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(el cual obtuvimos por inspección de la ecuación cartesiana de Π). Tenemos entonces

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 - b - c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y reescribiendo componente a componente:

$$b + c - 1 = \alpha$$

$$-b = \alpha$$

$$-c = \alpha$$

de donde sacamos que $b = c = 1/3$, y entonces $A = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ y entonces $Q = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

PVP