Problema. Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre la forma de Jordan de M y utilícela para calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$$

(el resultado del límite es una matriz, y se llama matriz *exponencial* de M)

Solución. Como M es triangular, sus valores propios son los elementos de su diagonal, es decir 1 (mult. 2) y -1 (mult. 1).

Para el valor propio -1: hay que resolver

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} v = \mathbf{0}$$

Escribiendo este sistema como ecuaciones, nos queda que $v_3 = 0$ y por lo tanto $v_2 = 0$. Entonces tomamos $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para el valor propio 1: hay que resolver

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \mathbf{0}$$

de donde se obtiene que $x_3 = 0$ y $x_1 = x_2$. Entonces nos queda $x = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, es decir sólo hay un vector propio l.i., el cual elegimos como $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Buscamos ahora un vector propio generalizado para el valor propio 1. Éste debe cumplir $(M - \mathbf{I})y = x$, o sea

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde sale que $y_3 = 1$ y $y_1 = y_2$, y entonces $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Notamos que el segundo vector es x que es el vector propio asociado al valor propio 1, que cumple $(M - \mathbf{I})x = \mathbf{0}$, por lo cual elegimos $y_1 = 0$ y nos quedamos con el vector propio (generalizado) $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así $M = PJP^{-1}$, donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Para la segunda parte: observamos que $M^k = (PJP^{-1})^k = PJ^kP^{-1}$. Entonces podemos factorizar

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = P \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J^k \right) \cdot P^{-1}$$

y nos resta calcular la expresión del paréntesis.

Busquemos alguna fórmula para las potencias de J:

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y en general (se puede demostrar por inducción):

$$J^k = \begin{pmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Con esto,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} J^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{pmatrix}$$

y concluimos que (tomando límite en cada componente de las respectivas matrices):

$$\text{lím} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k = P \cdot \begin{pmatrix} 1/e & 0 & 0 \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/e & e - 1/e & e \\ 0 & e & e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

DVD