

Pextra, semana 14.

1. Sea $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera (es decir, M no necesariamente es diagonalizable). Demuestre que $\det(M)$ es el producto de los valores propios de M . HINT: Escriba el polinomio característico de M de dos formas apropiadas.
2. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétricas, tales que A es definida positiva y B es semidefinida positiva.
 - a) Muestre que para cualquier par de reales $\alpha > 0, \beta > 0$ se tiene que $(\alpha A + \beta B)$ es definida positiva.
 - b) Demuestre que $\det(A + B) \geq \det(A)$.

(1) Si $p(\lambda)$ es el polinomio característico de M , sabemos que $p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$. Además, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los valores propios de M , entonces podemos factorizar p como

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^n (\lambda_j - \lambda)$$

y concluimos que $\det(M) = p(0) = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.

(2a) Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces

$$x^T(\alpha A + \beta B)x = \underbrace{\alpha x^T A x}_{>0} + \underbrace{\beta x^T B x}_{\geq 0} > 0$$

(2b) Notemos que A definida positiva implica A invertible. Entonces, denotando por I la matriz identidad, podemos escribir $A + B = A(I + A^{-1}B)$ y por lo tanto $\det(A + B) = \det(A) \cdot \det(I + A^{-1}B)$. Sea λ un valor propio cualquiera de $(I + A^{-1}B)$. Entonces

$$\det[(I + A^{-1}B) - \lambda I] = 0$$

y multiplicando a ambos lados por $\det(A)$ obtenemos que

$$\det[(1 - \lambda)A + B] = 0$$

lo que implica que la matriz $(1 - \lambda)A + B$ *no* es definida positiva. Usando la parte anterior, concluimos que $\lambda \geq 1$.

Hemos probado entonces que todos los valores propios de $(I + A^{-1}B)$ son mayores o iguales que 1, y por lo tanto

$$\det(A + B) = \underbrace{\det(A)}_{>0} \cdot \underbrace{\det(I + A^{-1}B)}_{\geq 1 \text{ por parte (1)}} \geq \det(A)$$

PVP