P1, semana 13. Sea A la matriz del enunciado.

(a) El polinomio característico de A es (aplicando operaciones elementales en algunos pasos)

$$p(x) = \det(A - xI) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & -1 \\ 1 & -1 & 2-x \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 3-x & 0 & 3-x \\ 0 & 3-x & x-3 \\ 1 & -1 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$= (3-x)\det \begin{pmatrix} 3-x & x-3 \\ -1 & 2-x \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 0 & 3-x \\ 3-x & x-3 \end{pmatrix} = (3-x)[(3-x)(2-x) + (x-3)] - (3-x)^2$$

$$= (3-x)^2(2-x-1-1) = -x(x-3)^2$$

luego los valores propios son $\lambda_1 = 0$ (multiplicidad 1), $\lambda_2 = 3$ (multiplicidad 2).

(b) Busquemos un vector propio asociado a $\lambda_1 = 0$. Es decir, tenemos que resolver el sistema $Ax = 0$. Resolvemos escalonando A:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3/2 & -3/2 \\ 0 & -3/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

de donde vemos que las ecuaciones 2 y 3 son l.d., y entonces las condiciones relevantes son $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $\frac{3}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0$, de donde obtenemos $x_2 = x_3 = -x_1$. Tomamos entonces el vector $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Para encontrar los vectores propios asociados a $\lambda_2 = 3$: sabemos que A es simétrica y por lo tanto diagonalizable, y que además el espacio propio asociado a 3 es ortogonal al espacio propio asociado a 0. Es más, tenemos que $W_3 = (W_0)^\perp = \langle \{v_1\} \rangle^\perp$. ¿Qué nos dice esto?

1. Que cualquier vector ortogonal a v_1 (no nulo) es vector propio de A asociado a λ_2. Por ejemplo, podemos elegir entonces $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Que cualquier vector ortogonal a v_1 y l.i. con respecto a v_2 es un vector propio de A útil para completar la base buscada. Para simplificar los cálculos, elegimos entonces $v_3 = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es fácil verificar que v_2 y v_3 son efectivamente vectores propios de A asociados a λ_2, con lo que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de vectores propios de A.

(c) Notar que la base obtenida en la parte anterior es ortogonal. Para que sea ortonormal, basta normalizar sus elementos. Así nos queda la base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$$

Con esto, podemos escribir $A = PDP^T$, con $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(d) A no es invertible, pues posee a 0 como uno de sus valores propios: un vector propio asociado es v_1, por lo que $Av_1 = 0$.

DVD