P2, semana 12. Sea A invertible y U s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ de dimensión $0 < k < n$. Sea

$$W = \{y \in \mathbb{R}^n : (\forall u \in U)\ \langle Au, Ay \rangle = 0\}$$

(a) Es claro que $0 \in W$ por lo que $W \neq \emptyset$. Sean $y, z \in W$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces, dado $u \in U$,

$$\langle Au, A(y + cz) \rangle = \underbrace{\langle Au, Ay \rangle}_{=0} + c \underbrace{\langle Au, Az \rangle}_{=0} = 0$$

y por lo tanto $y + cz \in W$.

Sea ahora $y \in W \cap U$. Como $y \in W$, entonces para cualquier $u \in U$ se tiene que $\langle Au, Ay \rangle = 0$. En particular, tomando $u = y$ pues $y \in U$, se tiene que $\|Ay\|^2 = \langle Ay, Ay \rangle = 0$, luego $Ay = 0$ y como A es invertible, obtenemos que $y = 0$.

(b) Propuesto.

(c) Sea $\beta = \{u_1, \ldots, u_k\}$.

- β es l.i.: Supongamos que $\sum_j a_j u_j = 0$. Entonces, premultiplicando por A nos queda $\sum_j a_j v_j = 0$, y como los (v_j) son base de V, se concluye que $a_j = 0$ para todo j.
- β es generador: Sea $u \in U$. Entonces, $Au \in V$. Como los (v_j) son base de V, existen escalares $a_1, \ldots, a_k$ tales que $\sum_j a_j v_j = Au$. Premultiplicando por A^{-1}, obtenemos que $\sum_j a_j u_j = u$.

Por lo tanto β es base de U.

Además, $\langle Au_i, Au_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$ por definición, y $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ pues los (v_j) son base ortonormal.

(d) La implicancia hacia la derecha es directa. Hacia la izquierda: para mostrar que $w \in W$, sea $u \in U$ cualquiera. Como β es base, existen escalares $a_1, \ldots, a_k$ tales que $u = \sum_j a_j u_j$. Entonces

$$\langle Au, Aw \rangle = \sum_j a_j \langle Au_j, Aw \rangle = \sum_j a_j \cdot 0 = 0$$

(e) Es claro que $z \in U$ pues es combinación lineal de los elementos de β. Para ver que $v - z \in W$, basta (usando la parte (d)) que para cualquier j, $\langle A(v - z), Au_j \rangle = 0$. Y, en efecto,

$$\langle A(v-z), Au_j \rangle = \langle Av, Au_j \rangle - \langle Az, Au_j \rangle = \langle Av, Au_j \rangle - \sum_l \langle Av, Au_l \rangle \underbrace{\langle Au_l, Au_j \rangle}_{=\delta_{lj}} = \langle Av, Au_j \rangle - \langle Av, Au_j \rangle = 0$$

(f) Dado lo anterior, tenemos que para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$ existe un $z \in U$ tal que

$$v = \underbrace{z}_{\in U} + \underbrace{(v - z)}_{\in W}$$

por lo que $\mathbb{R}^n = U + W$. Como de la parte (a) sabemos que la intersección es nula, concluimos que $\mathbb{R}^n = U \oplus W$, y entonces $\dim W = n - \dim U = n - k$.

DVD