P3, semana 11. Sean $A = RS$, $B = SR$, con S invertible.

(a) Sea v tal que $Av = \lambda v$. Entonces $SAv = \lambda Sv$, es decir $SRSv = \lambda Sv$ lo que se puede escribir como $BSv = \lambda Sv$. Recíprocamente, sea v tal que $B(Sv) = \lambda(Sv)$. Entonces $S^{-1}BSv = \lambda v$, y basta con ver $S^{-1}BS = RS = A$.

Con esto hemos concluido que λ es valor propio de A ssi es valor propio de B, y entonces A y B tienen los mismos valores propios

(b) Sea λ un valor propio. Sea $x_1, \ldots, x_k$ una base de $W_\lambda(A)$. Entonces $x_1, \ldots, x_k$ son vectores propios de A asociados a λ. Por la parte (a), entonces $Sx_1, \ldots, Sx_k$ son vectores propios de B asociados a λ y por lo tanto están en $W_\lambda(B)$. Es fácil mostrar que $\{Sx_1, \ldots, Sx_k\}$ es l.i., y entonces $\dim W_\lambda(B) \geq k = \dim W_\lambda(A)$. Análogamente, tomando $y_1, \ldots, y_l$ una base de $W_\lambda(B)$, vemos que $\{S^{-1}y_1, \ldots, S^{-1}y_l\}$ es un conjunto l.i. en $W_\lambda(A)$, y entonces se concluye la otra desigualdad.

(c) Notar que M es diagonalizable ssi $\sum_{\lambda \in vp(M)} \dim W_\lambda(M) = n$, donde $vp(M) = \{\lambda : \lambda \text{ es valor propio de } M\}$ (esto es equivalente a decir que existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores propios de M). Como en la parte (a) mostramos que $vp(A) = vp(B)$ y en la parte (b) que para cualquier λ, $\dim W_\lambda(A) = \dim W_\lambda(B)$, concluimos que

$$\sum_{\lambda \in vp(A)} \dim W_\lambda(A) = \sum_{\lambda \in vp(B)} \dim W_\lambda(B)$$

y por lo tanto el lado izquierdo vale n ssi el lado derecho vale n, es decir A diagonalizable ssi B diagonalizable.

DVD