

P3, semana 10. Tenemos que $AB = BA$.

(a) Si v es vector propio de A asociado a λ , entonces $Av = \lambda v$. Multiplicando a ambos lados por B , nos queda $BAv = \lambda Bv$. Como A y B conmutan se sigue que $A(Bv) = \lambda(Bv)$ y, como $Bv \neq 0$, tenemos que Bv es vector propio de A asociado a λ .

(b) Sea v vector propio de A , y sea λ su valor propio asociado. Llamemos W_λ al correspondiente espacio propio, el cual sabemos que es de dimensión 1. Como v es no nulo y pertenece a W_λ , concluimos que $W_\lambda = \langle \{v\} \rangle$.

Supongamos que $Bv \neq 0$, para poder utilizar la parte (a). En este caso, sabemos que Bv es vector propio de A también asociado a λ , por lo que $Bv \in W_\lambda$. Pero como $\{v\}$ es base de W_λ , entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $Bv = \alpha v$, y entonces v es vector propio de B asociado al valor α .

Si, por el contrario, $Bv = 0$, entonces lo escribimos como $Bv = 0v$ y tenemos directamente que v es vector propio de B asociado al valor 0.

En cualquier caso, entonces, v es vector propio de B .

PVP