P3, semana 8. Tenemos el espacio vectorial $V \times W$ y su subconjunto $G_f = \{(v,w) \in V \times W : w = f(v)\}$ para una función $f : V \to W$ dada.

(a) Supongamos que f es lineal. Tenemos entonces que $0_W = f(0_V)$, con lo que $(0_V, 0_W) \in G_f$ y éste resulta ser no vacío. Sean ahora $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in G_f$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Que ambos pares ordenados estén en G_f significa que $w_1 = f(v_1)$ y $w_2 = f(v_2)$. Por linealidad de f, nos queda que $w_1 + \lambda w_2 = f(v_1 + \lambda v_2)$ y así $(v_1 + \lambda v_2, w_1 + \lambda w_2) \in G_f$, que es lo que queríamos demostrar.

Supongamos ahora que G_f es subespacio vectorial de $V \times W$. Sean $v_1, v_2 \in V$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Llamemos $w_1 = f(v_1), w_2 = f(v_2)$. Entonces, por definición de G_f obtenemos que $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in G_f$. Como éste es subespacio de $V \times W$, entonces

$$(v_1, w_1) + \lambda(v_2, w_2) = (v_1 + \lambda v_2, w_1 + \lambda w_2) \in G_f$$

lo que por definición de G_f significa que $w_1 + \lambda w_2 = f(v_1 + \lambda v_2)$, es decir

$$f(v_1) + \lambda f(v_2) = f(v_1 + \lambda v_2)$$

lo que concluye la demostración.

(b) $\{0_V\} \times W$ es claramente no vacío pues $(0_V, 0_W)$ pertenece a él. Sean ahora $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in \{0_V\} \times W$. Se desprende de esto que $v_1 = v_2 = 0_V$. Entonces, para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$(v_1, w_1) + \lambda(v_2, w_2) = (\underbrace{0_V + \lambda 0_V}_{=0_V}, \underbrace{w_1 + \lambda w_2}_{\in W})$$

y entonces $(v_1, w_1) + \lambda(v_2, w_2) \in \{0_V\} \times W$.

(c) Como f es lineal, por la parte (a) sabemos que G_f es subespacio de $V \times W$. Por la parte (b), sabemos que $\{0_V\} \times W$ también es subespacio de $V \times W$.

Sea $(v, w) \in G_f \cap (\{0_V\} \times W)$. Como $(v, w) \in \{0_V\} \times W$, observamos que $v = 0_V$. Como además $(v, w) \in G_f$, concluimos que $w = f(v) = f(0_V) = 0_W$ por la linealidad de f. Por lo tanto, $G_f \cap (\{0_V\} \times W) \subseteq \{(0_V, 0_W)\}$ y entonces $G_f \cap (\{0_V\} \times W) = \{(0_V, 0_W)\}$.

Sea ahora $(v, w) \in V \times W$. Buscamos $(x, y) \in G_f$ y $(r, s) \in \{0_V\} \times W$ tales que

$$(v, w) = (x, y) + (r, s) = (x + r, y + s) \tag{1}$$

Notemos que debe cumplirse que $r = 0_V$. Por lo tanto, de (1) concluimos que $x = v$. Como además $(x, y) \in G_f$, se sigue que $y = f(x) = f(v)$. Y de (1) obtenemos que $y + s = w$, o sea $s = w - y = w - f(v)$. Hemos despejado todas las incógnitas, por lo que escribimos

$$(v, w) = \underbrace{(v, f(v))}_{\in G_f} + \underbrace{(0_V, w - f(v))}_{\in \{0_V\} \times W}$$

y concluimos que $G_f + (\{0_V\} \times W) = V \times W$.

La suma directa se obtiene como consecuencia de ambas propiedades.

DVD