P3a, semana 7. Dada A matriz de $n \times n$ y V subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, se define $A(V) = \{Ax : x \in V\}$.

(a1) Notamos que $A(V) \neq \emptyset$ pues $0 \in V$ y $A \cdot 0 = 0$, por lo que $0 \in A(V)$. Además, si $y, z \in A(V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces existen $x, w \in V$ tales que $y = Ax$, $z = Aw$ y así

$$y + \lambda z = A(x + \lambda w)$$

Como V es espacio vectorial $(x + \lambda w) \in V$, y por lo tanto $(y + \lambda z) \in A(V)$, con lo que concluimos que $A(V)$ es subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(a2) Sea $y \in A(V) \cap A(W)$. Entonces existen $v \in V$ y $w \in W$ tales que $Av = y = Aw$, con lo que $Av = Aw$. Como A es invertible, tenemos que $v = w$, por lo tanto $v \in V \cap W$. Por hipótesis concluimos que $v = 0$, y entonces $y = 0$.

Para mostrar que $A(V) + A(W) = \mathbb{R}^n$, tenemos dos opciones: La primera es notar que $\dim(A(V) + A(W)) = \dim A(V) + \dim A(W)$, y que como A es invertible la aplicación lineal $x \to Ax$ es isomorfismo tanto si se considera de V en $A(V)$ como si se considera de W en $A(W)$. Así, $\dim A(V) = \dim V$ y $\dim A(W) = \dim W$, con lo que $\dim(A(V) + A(W)) = \dim V + \dim W = \dim(V \oplus W) = \dim \mathbb{R}^n$, y se concluye el resultado deseado.

La otra opción es: Dado un $x \in \mathbb{R}^n$, queremos escribirlo como suma de un elemento de $A(V)$ y otro de $A(W)$. Definamos $y = A^{-1}x$. Entonces $y \in \mathbb{R}^n$, y como $\mathbb{R}^n = V \oplus W$, existen $v \in V, w \in W$ tales que $y = v + w$. Así, $x = Av + Aw$, con lo que tenemos el resultado deseado.

(a3) Seguiremos la indicación. Sea $z \in \mathbb{R}^n$. Como $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, existen $x \in A(V), y \in A(W)$ tales que $z = x + y$. Además, sabemos que existen $v \in V, w \in W$ tales que $x = Av, y = Aw$. Nos queda que $z = A(v + w)$, y por lo tanto el sistema $z = A\mathbf{x}$ tiene solución cualquiera sea z. Entonces A es invertible.

DVD