Pextra, semana 6 (espacios y subespacios vectoriales).

1. *a*) La función nula $\mathbf{0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es el cero del espacio $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$. Es claramente una función derivable, y su derivada es $\mathbf{0}'(t) = 0$ para todo t. Así, $\mathbf{0}'(t) = 0 = 9 \cdot \mathbf{0}(t)$, y entonces $\mathbf{0} \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ con lo cual éste último es no vacío.

   Sean ahora funciones $f, g \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Como f y g son derivables entonces $f + \lambda g$ también lo es, y
$$(f+\lambda g)'(t) = f'(t) + \lambda g'(t) = 9f(t) + \lambda 9 g(t) = 9(f+\lambda g)(t)$$
   con lo cual $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ es cerrado para combinaciones lineales, y entonces es subespacio vectorial.

   b) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, y por lo tanto también lo es su intersección. De este modo, $\mathbf{0} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R})$, con lo cual obtenemos que $\{\mathbf{0}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R})$.

   Para la otra inclusión: sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R})$. Como $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, entonces f es un polinomio. Sea n su grado. Como $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$, entonces se tiene que $f'(t) = 9f(t)$ para todo t. Notamos que el lado izquierdo de esta última igualdad es un polinomio de grado $n-1$ y el lado derecho es un polinomio de grado n, luego no pueden ser iguales para todo t. Esto, claro, a menos que f sea el polinomio nulo. Entonces $f = \mathbf{0}$, y así $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{E}(\mathbb{R}) \subseteq \{\mathbf{0}\}$.

2. Tenemos $L : x = \begin{pmatrix} -5a \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\Pi : \left\langle x, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

   a) Sea $z \in \mathbb{R}^3$. Su proyección sobre Π es $\pi(z)$, un punto que debe cumplir (1) $\pi(z) \in \Pi$, y (2) $(\pi(z) - z) \perp \Pi$.

   De (2) notamos que $(\pi(z) - z)$ es paralelo a $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir $\pi(z) = z + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para algún α real.

   De (1) tenemos que $\left\langle \pi(z), \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. Reemplazando la expresión que tenemos para $\pi(z)$ nos queda
$$\underbrace{\left\langle z, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=z_1+z_2+z_3} + \alpha \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{=3} = 0$$
   y por lo tanto $\alpha = -\frac{z_1+z_2+z_3}{3}$, de donde se concluye que
$$\pi(z) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{z_1+z_2+z_3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2z_1 - z_2 - z_3 \\ -z_1 + 2z_2 - z_3 \\ -z_1 - z_2 + 2z_3 \end{pmatrix}$$

   b) Explicitemos L': Sea $y \in L'$, entonces existe $x \in L$ tal que $y = \pi(x)$. Como $x \in L$, entonces existe λ real tal que $x = \begin{pmatrix} -5a \\ 3 \\ a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a - \lambda \\ 3 \\ a + 2\lambda \end{pmatrix}$. Usando la parte anterior, nos queda que
$$\begin{aligned} y &= \pi(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2(-5a-\lambda) - 3 - (a+2\lambda) \\ -(-5a-\lambda) + 2 \cdot 3 - (a+2\lambda) \\ -(-5a-\lambda) - 3 + 2(a+2\lambda) \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -11a - 3 - 4\lambda \\ 4a + 6 - \lambda \\ 7a - 3 + 5\lambda \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-11a-3}{3} \\ \frac{4a+6}{3} \\ \frac{7a-3}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

o sea, L' es una recta con vector director $\begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$ y que pasa por el punto $\begin{pmatrix} \frac{-11a-3}{3} \\ \frac{4a+6}{3} \\ \frac{7a-3}{3} \end{pmatrix}$.

Para que L' sea subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, debe pasar por el origen. Es decir, debe existir un λ tal que

$$\begin{pmatrix} \frac{-11a-3}{3} \\ \frac{4a+6}{3} \\ \frac{7a-3}{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -4/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente,

$$\begin{aligned} -11a - 3 &= 4\lambda \\ 4a + 6 &= \lambda \\ 7a - 3 &= -5\lambda \end{aligned}$$

de donde se despeja $\lambda = 2, a = -1$. Por lo tanto, para que L' pase por el origen (con lo cual será subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ y, en particular, de Π) debe cumplirse que $a = -1$.

DVD