

P3, semana 4. Tenemos:

$$\Pi_1 : x + y + 2z = 1 \quad (1)$$

$$\Pi_2 : -x + y = 2 \quad (2)$$

$$L_1 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(a) $L_2 = \Pi_1 \cap \Pi_2$. Las ecuaciones cartesianas de L_2 son exactamente las dadas en (1) y (2), así que

$$L_2 : \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ -x + y = 2 \end{cases}$$

Para obtener un vector director d de L_2 , tenemos dos alternativas:

- (a) d debe ser un vector paralelo tanto a Π_1 como a Π_2 , por lo tanto se puede elegir como el producto cruz de n_1 y n_2 , los vectores normales de Π_1 y Π_2 .
- (b) d puede obtenerse restando dos puntos distintos cualesquiera que cumplan las ecuaciones cartesianas de L_2 .

Usaremos la primera forma. A partir de las ecuaciones de Π_1 y Π_2 , vemos que $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $n_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, por lo cual

$$n_1 \times n_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

y para simplificar los números, elegimos $d = \frac{-1}{2}(n_1 \times n_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) Para hallar $P_2 = L_1 \cap \Pi_1$, una forma conveniente es encontrar la ecuación normal de Π_1 . Ya sabemos que $n_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, así que nos basta encontrar un punto que pertenezca a Π_1 . Esto es fácil de hacer, por inspección a partir de la ecuación (1): podemos elegir $x = 1, y = 0, z = 0$, con lo cual nos queda

$$\Pi_1 : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

De este modo, como $P_2 \in \Pi_1$, se debe cumplir que $\left\langle P_2 - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$. Además, como

$P_2 \in L_1$, a partir de la ecuación (3) obtenemos que existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Notar que basta despejar el valor de λ para encontrar P_2 . Reemplazando esta expresión para P_2 en la ecuación inmediatamente anterior, nos queda

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle + \lambda \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

por lo que $\lambda = -2$, y entonces $P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Llamemos Π al plano perpendicular a L_2 que pasa por P_2 . Es fácil ver que si queremos que Π sea perpendicular a L_2 , entonces podemos elegir su vector normal como el vector director de L_2 , el cual es $d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Como además sabemos que Π pasa por $P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, podemos escribir la ecuación normal de Π :

$$\Pi : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Para encontrar $P_3 = L_2 \cap \Pi$ podemos proceder como en la parte anterior, para lo cual requerimos la ecuación cartesiana de L_2 . Ya tenemos su vector director d , así que sólo falta un punto de apoyo.

Por inspección a partir de las ecuaciones cartesianas de L_2 , obtenemos el punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. Con esto,

debe existir un $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Trabajando como antes, se llega a que

$$P_3 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Sea L la recta contenida en Π_2 que pasa por P_3 y es perpendicular a L_2 . Recordemos que L_2 está contenida también en Π_2 , de modo que tanto d (el director de L_2) como n_2 (el normal a Π_2) deben ser perpendiculares a L , de modo que para obtener un vector director de L calculamos

$$D = d \times n_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Como L pasa por P_3 , elegimos P_3 como puntos de apoyo y escribimos la ecuación vectorial de L :

$$L : \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

DVD