

P1, semana 2. Sea $J \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz que contiene sólo unos, y $e \in \mathbb{R}^n$ un vector de n unos. Es decir, $J_{ij} = 1$ para i, j y $e_k = 1$ para todo k .

(a) Demostraremos la igualdad deseada comparando las k -ésimas componentes de ambos vectores:

$$(Je)_k = \sum_{l=1}^n J_{kl}e_l = \sum_{l=1}^n 1 = n = n \cdot 1 = n \cdot e_k = (ne)_k$$

y por lo tanto $Je = ne$.

Del mismo modo, dados i, j tenemos que

$$(J^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n J_{ik}J_{kj} = \sum_{k=1}^n 1 = n = n \cdot 1 = n \cdot J_{ij} = (nJ)_{ij}$$

y entonces $J^2 = nJ$.

(b) Sea $\alpha \neq 1/n$. Para que la matriz $(I + \beta J)$ sea la inversa de $(I - \alpha J)$, las multiplicaremos y verificaremos que su producto dé la identidad:

$$(I - \alpha J)(I + \beta J) = I^2 + \beta J - \alpha J - \alpha\beta J^2 = I + (\beta - \alpha - \alpha\beta n)J$$

(usando que $J^2 = nJ$) y para que el resultado sea I , basta imponer que $\beta - \alpha - \alpha\beta n = 0$, es decir que $\beta = \frac{\alpha}{1-\alpha n}$.

(c) Sea $\alpha = 1/n$. Entonces

$$(I - \alpha J)e = e - \frac{1}{n}Je = e - e = \mathbf{0}$$

(usando que $Je = ne$)

DD