P3b, semana 1. (el P3a fue hecho en clase)

Sea $M \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ tal que $(M^tM) \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es invertible, y definimos $P = I_m - M(M^tM)^{-1}M^t \in \mathcal{M}_{mm}(\mathbb{R})$.

(1)

$$\begin{aligned}
P^2 &= P \cdot P \\
&= \left(I_m - M(M^tM)^{-1}M^t\right) \cdot \left(I_m - M(M^tM)^{-1}M^t\right) \\
&= I_m - 2M(M^tM)^{-1}M^t + \left(M(M^tM)^{-1}M^t\right)\left(M(M^tM)^{-1}M^t\right) \\
&= I_m - 2M(M^tM)^{-1}M^t + M(M^tM)^{-1}\underbrace{(M^tM)(M^tM)^{-1}}_{=I_m}M^t \\
&= I_m - 2M(M^tM)^{-1}M^t + M(M^tM)^{-1}M^t \\
&= I_m - M(M^tM)^{-1}M^t \\
&= P
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
PM &= \left(I_m - M(M^tM)^{-1}M^t\right) \cdot M \\
&= M - M\underbrace{(M^tM)^{-1}M^tM}_{=I_m} \\
&= M - M \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2) Recordemos que $(AB)^t = B^tA^t$, por lo que $(M^tM)^t = M^t(M^t)^t = M^tM$ y concluimos que (M^tM) es simétrica. Con esto, $(M^tM)^{-1}$ también es simétrica, y nos queda que

$$P^t = I_m^t - \left(M(M^tM)^{-1}M^t\right)^t = I_m - (M^t)^t\left((M^tM)^{-1}\right)^tM^t = I_m - M(M^tM)^{-1}M^t = P$$

DVD