

Ejercicios sobre matrices: Matrices Estocásticas

Álgebra Lineal, sección 1 - Semestre de Primavera, 2007

Definición 1 Sea v un vector de $\mathbb{R}^n$. Diremos que v es un vector de probabilidad si:

- Todas sus entradas son positivas, $v_i \geq 0$ para todo i
- La suma de sus componentes vale 1

Definición 2 Sea P una matriz cuadrada de $n \times n$. Llamaremos a P matriz estocástica si:

- Todas sus entradas son positivas, $p_{ij} \geq 0$ para todo i, j
- La suma de sus coeficientes en cada fila vale 1, es decir si

$$(\forall i = 1, \dots, n) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$$

y doblemente estocástica si además la suma de sus coeficientes en cada columna también vale 1, o sea

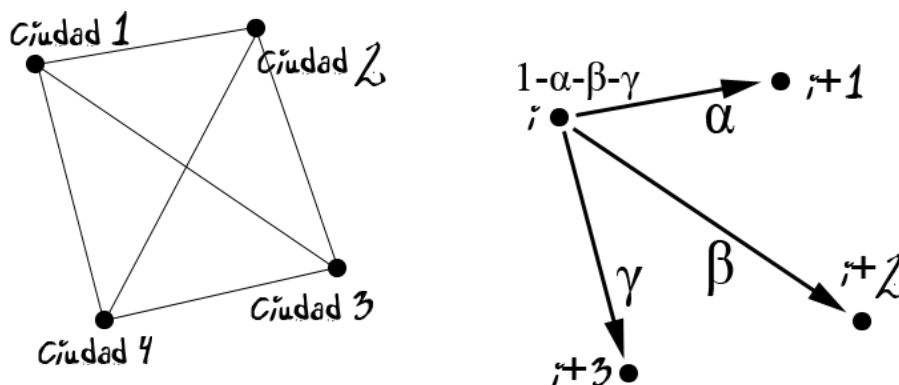
$$(\forall j = 1, \dots, n) \quad \sum_{i=1}^n p_{ij} = 1$$

Denotaremos por $\mathbf{1}$ al vector cuyas componentes valen todas 1.

1. Sean v, P un vector y una matriz con todas sus entradas positivas. Demuestre que v es un vector de probabilidad si y sólo si $v^T \mathbf{1} = 1$, y que P es estocástica si y sólo si $P \mathbf{1} = \mathbf{1}$.
2. Demuestre que P es doblemente estocástica si y sólo si P y P^T son estocásticas, y concluya que si P es simétrica y estocástica entonces es doblemente estocástica.
3. Sea v un vector de probabilidad. ¿Qué condición sobre P permite demostrar que Pv también es vector de probabilidad?
4. Dé ejemplos de matrices P que sean estocásticas e invertibles, tales que (i) P^{-1} no sea estocástica, y (ii) P^{-1} sea estocástica.

Elaboraremos un pequeño modelo aleatorio donde utilizaremos estos conceptos.

Consideremos un camión de una empresa que realiza viajes entre cuatro ciudades dispuestas en el mapa como indica la figura. Cada día, el chofer del camión recibe un llamado de la oficina local donde se le indica a qué ciudad debe viajar. Se sabe que, estando en la ciudad i , la probabilidad de viajar a la ciudad $i + 1$ es α , a la ciudad $i + 2$ es β y a la ciudad $i + 3$ es γ (las sumas se consideran hechas módulo 4). De este modo, la probabilidad de permanecer en la ciudad i ese día es $1 - \alpha - \beta - \gamma$ (asumimos que $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$, y que su suma es ≤ 1). En el diagrama de flechas tenemos un esquema de esto:



Si llamamos m_{ij} a la probabilidad de viajar de la ciudad i a la j , podemos construir con estas probabilidades la siguiente matriz (llamada *matriz de transición de estados* del proceso):

$$M = \begin{bmatrix} 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma & \alpha \\ \alpha & \beta & \gamma & 1-\alpha-\beta-\gamma \end{bmatrix}$$

1. Muestre que M es estocástica, y que si $\alpha = \gamma$ entonces M es doblemente estocástica.
2. Asuma que $\alpha = \beta = \gamma$, con lo que la matriz M queda de la forma

$$M = \begin{bmatrix} 1-3\alpha & \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-3\alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1-3\alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha & 1-3\alpha \end{bmatrix}$$

Escalonando M , determine los valores de α tales que M sea invertible. Hint: Permute la fila 1 de M con alguna otra antes de comenzar a escalar.

3. Si $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, calcule la inversa de M .
4. Suponga que $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ (esto modela una situación en donde el camión debe viajar todos los días, con igual probabilidad a cada ciudad).

- a) Denote por $\mathbf{I}$ a la matriz identidad y por J a la matriz cuyas componentes valen todas 1, ambas de dimensión 4×4 . Demuestre que para todo $n \geq 0$,

$$M^n = \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{-1}{3} \right)^n \right] \cdot J + \left(\frac{-1}{3} \right)^n \cdot \mathbf{I}$$

- b) Si un día dado el camión se encuentra en la ciudad j , la probabilidad de que después de n días esté en la ciudad i se puede calcular como $p = e_i^T M^n e_j$. Usando la parte anterior demuestre que, sin importar la ciudad j donde se encuentre el camión hoy, la probabilidad de encontrarlo en una ciudad dada i converge a $1/4$ cuando $n \rightarrow \infty$.

¡Suerte!

DVD