Calculo Diferencial e Integral

Profesor: Raúl Uribe
Profesor Auxiliar: Cristóbal Quiñinao

August 16, 2007

Recordemos que ya hemos visto los conceptos de continuidad tanto en un punto, como en un intervalo; teoremas de continuidad en un intervalo; y la continuidad uniforme.

Definición: Sea $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es continua en el punto $x_0 \in \mathcal{A}$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in \mathcal{A} \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Del mismo modo diremos que f es continua en $\mathcal{A}$ si es continua en cada $x_0 \in \mathcal{A}$

Teorema:(del Valor Intermedio) Si f es continua en $[a, b]$ y λ es un número real tq $f(a) < \lambda < f(b)$ entonces $\exists x_0 \in [a, b]$ tq $f(x_0) = \lambda$

Corolario:(del Grafo cerrado) Si f es continua en $[a, b]$ entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado. De esto se puede desprender que f alcanza su máximo y su mínimo en el intervalo

Corolario:(Weierstrass-Nullstellensatz) Si f es continua en $[a, b]$ y $f(a) \cdot f(b) < 0$, es decir, toma valores de signos contrarios en los extremos del intervalo; entonces $\exists x_0 \in [a, b]$ tq $f(x_0) = 0$

Corolario:(del Punto Fijo) Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, entonces existe $c \in [0, 1]$ tq $f(c) = c$

Teorema: Si $f : [0, 1] \to [0, 1]$ es una función continua, entonces $\exists \underline{x} \in [a, b]$ y $\exists \overline{x} \in [a, b]$ tales que $\forall x \in [a, b]$ se tiene que $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$

Definición: Sea $f : \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Diremos que f es uniformemente continua en $\mathcal{A}$ si:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x, y \in \mathcal{A} \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

para entender bien la diferencia entre continuidad y continuidad uniforme basta que notemos las diferencia en el orden de los cuantificadores. Esto se traduce en que el δ encontrado en la continuidad depende tanto de ϵ como de x_0; mientras que en caso uniforme queda totalmente determinado conociendo ϵ

Teorema: Si una función es continua en $[a, b]$ entonces es uniformemente continua en ese intervalo

Ahora procederemos a hacer problemas relacionados con la diferenciación de funciones en un punto, en un intervalo y a la aplicación de las reglas generales de derivación. El único gran Teorema que tenemos que tener en mente es que una función diferenciable necesariamente debe ser continua.

Definición: Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que es derivable en el punto $x_0 \in (a, b)$, y lo denotaremos por $f'(x_0)$ si el siguiente límite existe:

$$f'(x_0) = lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

también lo escribiremos como $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Como antes diremos que f es diferenciable en el intervalo (a, b) si es derivable en cada punto del intervalo

Proposición: Sean $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en $x_0 \in (a, b)$. Entonces:

(i) $f \pm g$ es derivable en x_0 y $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

(ii) $f \cdot g$ es derivable en x_0 con $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

(iii) Si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es derivable con $(\frac{f}{g})'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Teorema:(Regla de la Cadena) Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable en $x_0 \in (a, b)$, y $g : Rec(f) \to \mathbb{R}$ derivable en $f(x_0)$. Entonces $(g \circ f)$ es derivable en x_0 y se tiene que:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Ejemplo: Calcule la derivada de la siguiente función $f(x) = \frac{1}{a\sqrt{pq}} \cdot arctg(\sqrt{\frac{p}{q}} e^{ax})$

Solución: Primero calculemos la derivada de $arctg(\cdot)$.
Sea $y = arctg(x) \Rightarrow x = tg(y)$ utilizando la regla de derivación implícita, que vimos en clases, tendremos que $1 = \frac{dtg(y)}{dy} \frac{dy}{dx}$, recordando que la derivada de tangente es $tg'(t) = \frac{1}{cos^2(t)}$ y usando la conocida fórmula $cos^2(t) = \frac{1}{tg^2(t)+1}$ se tiene que $arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Ahora usando la regla de la cadena tendremos que:

$$f'(x) = \frac{1}{a\sqrt{pq}} \cdot \frac{1}{\frac{p}{q}e^{2ax}+1} \cdot \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot a \cdot e^{ax}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\frac{p}{q}e^{2ax}+1} \cdot \sqrt{\frac{1}{q}} \cdot e^{ax}$$
$$f'(x) = \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\frac{p}{q}e^{2ax}+1} \cdot e^{ax}$$
$$\Rightarrow f'(x) = \frac{e^{ax}}{pe^{2ax}+q}$$

Veamos un par de problemas relacionados conel cálculo de derivadas:

Problema: Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$$h(x) = \quad \left\{ \begin{array}{cc} 2x^2 + 3x + 1 & \text{si } x < 1 \\ \\ ax + b & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right.$$

Encuentre los valores de a y b para los cuales la función $h(\cdot)$ es derivable en todo $\mathbb{R}$

Solución:
Lo primero que debemos imponer es que la función sea continua en todo su dominio. Para $x \neq 1$ la función cumple con esta propiedad pues estará definida como un polinimio.
Solo debemos preocuparnos por el valor de la función para $x = 1$. Para esto calculemos los límites laterales:

$$\begin{array}{c} lim_{x\to 1^+} h(x) = lim_{x\to 1^+} ax + b = a + b \\ lim_{x\to 1^-} h(x) = lim_{x\to 1^-} 2x^2 + 3x + 1 = 6 \end{array}$$

deducimos que una condición necesaria (pero no suficiente para que la función sea derivable en todo $\mathbb{R}$) es que $(\star)$ $a + b = 6$.
Por otro lado, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ se cumple que $h(x)$ es derivable pues toda recta y/o polinomio lo son. Calculemos su derivada por definición en 1:
En $x = 1^+$

$$h'(1) = lim_{t\to 0} \tfrac{a(1+t)+b-(a+b)}{t} = a$$

En $x = 1^-$

$$h'(1) = lim_{t\to 0} \tfrac{2(1+t)^2+3(1+t)+1-2-3-1}{t} = lim_{t\to 0} \tfrac{2+4t+2t^2+3+3t-5}{t} = 7$$

Luego, dado que si existe la derivada, debe ser única tendremos que $a = 7$ y de la condición $(\star)$ deducimos que $b = -1$

Problema: Considere la función $f(x) = \frac{a}{2} Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}) - \sqrt{a^2 - x^2}$ para $a > 0$. Demuestre que

(a) La función derivada de f viene dada por $f'(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$

(b) La longitud del trazo $\overline{PT}$ donde $P(x_0, y_0)$ es un punto cualquiera de la curva $f(x) = y$ y T es el punto donde la recta L, tangente a la curva en el punto P, corta al eje $\overline{OY}$ es constante independiente del punto P antes escogido

Solución:

(a) Notemos que racionalizando y usando las propiedades del logaritmo podemos reescribir la función, esto es:

$$\tfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \tfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}} = \tfrac{(a+\sqrt{a^2-x^2})^2}{x^2}$$

y

$$Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}) = Ln(\frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x})^2 = 2Ln(\frac{(a+\sqrt{a^2-x^2})}{x})$$

asi la función queda $f(x) = aLn(a+\sqrt{a^2-x^2}) - aLn(x) - \sqrt{a^2-x^2}$. Ahora derivando esta expresión tendremos:

$$f'(x) = a \cdot \frac{1}{a+\sqrt{a^2-x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x) - \frac{a}{x} - \frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}} \cdot (-2x)$$
$$f'(x) = \frac{-ax}{(a+\sqrt{a^2-x^2})(\sqrt{a^2-x^2})} - \frac{a}{x} + \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

y racionalizando el primer término

$$\frac{-ax}{(a+\sqrt{a^2-x^2})(\sqrt{a^2-x^2})} \cdot \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-ax(a-\sqrt{a^2-x^2})}{x^2(\sqrt{a^2-x^2})} = \frac{-a^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a}{x}$$

usando esto en la expresión de la derivada y sumando se llega a la expresión deseada:

$$f'(x) = -\frac{a^2-x^2}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$$

(b) No es difícil darse cuenta que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, y_0)$ es de la forma $L(x) = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ además $y_0 = f(x_0)$ juntando todo esto se tiene que

$$L(x) = -\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}}{x_0}(x - x_0) + \frac{a}{2}Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x_0^2}}{a-\sqrt{a^2-x_0^2}}) - \sqrt{a^2-x_0^2}$$

Para tener las coordenadas del punto T basta notar que es de la forma $T(0, L(0))$ así evaluando la expresión anterior en el origen obtenemos que $L(0) = \frac{a}{2}Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x_0^2}}{a-\sqrt{a^2-x_0^2}})$. Finalmente la longitud del trazo $\overline{PT}$ se reduce a calcular la distancia entre $P(x_0, y_0)$ y $T(0, L(0))$ lo cual es:

$$d^2 = (x_0 - 0)^2 + (y_0 - L(0))^2$$
$$d^2 = x_0^2 + (\frac{a}{2}Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x_0^2}}{a-\sqrt{a^2-x_0^2}}) - \sqrt{a^2-x_0^2} - \frac{a}{2}Ln(\frac{a+\sqrt{a^2-x_0^2}}{a-\sqrt{a^2-x_0^2}}))^2$$
$$\Rightarrow d^2 = x_0^2 + a^2 - x_0^2 = a^2$$

lo cual es claramente una constante independiente del punto $P(x_0, y_0)$ que escogimos.

Problema: Dada la función $f(x) = \frac{1-cos^n(x)}{x}$ para $x \neq 0$; y como $f(0) = 0$, para $x = 0$. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(i) $f(x)$ es continua

(ii) $f(x)$ es derivable

(iii) $f'(x)$ es continua

Solución:

(i) Es claro que para todo $x \neq 0$ la función es continua por ser composición y cuociente de funciones continuas, debemos mostrar que $lim_{x\to 0} f(x) = 0$.
Esto se puede hacer por inducción: para $n = 1$, $lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x} = 0$ límite conocido.
Asumiendo la hipótesis de inducción, veamos que $lim_{x\to 0}\frac{1-cos^{n+1}(x)}{x} = 0$, en efecto

$$\frac{1-cos^{n+1}(x)}{x} = \frac{1-cos^{n+1}(x)+cos^n(x)-cos^n(x)}{x} = \frac{1-cos^n(x)}{x} + \frac{cos^n(x)-cos^{n+1}(x)}{x}$$

el primer sumando tiende a cero por hipótesis de inducción y el segundo factorizando por $cos^n(x)$ se tiene que

$$\frac{cos^n(x)-cos^{n+1}(x)}{x} = cos^n(x)\frac{1-cos(x)}{x}$$

el cual también se va a cero pues es un límite conocido, es decir $f(x) \to 0$ si $x \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con lo cual deducimos que la función es continua.

(b) Nuevamente para $x \neq 0$ la función es claramente derivable, y su derivada es $f'(x) = \frac{nxcos^{n-1}(x)sen(x)-1+cos^n(x)}{x^2}$.
Si calculamos por definición la derivada en $x = 0$

$$f'(0) = lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{(1-cos^n(h))}{h^2}$$

evaluando para $n = 2$ el límite queda 1; para $n = 3$ queda $3/2$; y para $n = 4$ queda 2.
Deducimos que el límite debe valer $n/2$, asumiendo que $lim_{h\to 0}\frac{(1-cos^n(h))}{h^2} = \frac{n}{2}$, lo probamos para $n+1$

$$\frac{(1-cos^{n+1}(h))}{h^2} = \frac{(1-cos^{n+1}(h)+cos^n(h)-cos^n(h))}{h^2} = \frac{(1-cos^n(h))}{h^2} + cos^n(h)\frac{(1-cos(h))}{h^2}$$

lo cual por hipótesis de inducción y límites conocidos se deduce que tiende a $(n+1)/2$ si $h \to 0$ que era lo que queríamos probar.

(iii) Finalmente como $\frac{nxcos^{n-1}(x)sen(x)-1+cos^n(x)}{x^2} = \frac{nxcos^{n-1}(x)sen(x)}{x^2} - \frac{1-cos^n(x)}{x^2} \to n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, concluímos que $f'(x)$ es continua

Problema: Sea $y = arcsen(x)$,

(a) Comprobar que $y''(x^2-1)+xy=0$

(b) Obtener una relación de recurrencia entre las derivadas $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$ en $x=0$

(c) Mediante esta relación de recurrencia, calcular $y^{(n)}(0)$

Solución:

(a) Se sabe que $y' = (arcsen(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, de donde deducimos que $y''(x) = ((arcsen(x)')' = -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$ y así $y''(x^2-1) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -xy$ lo que prueba lo que queríamos

(b) Aplicamos la Fórmula de Leibinz a la relación $y''(x^2-1)+xy=0$,

$$y^{(n+2)}(x^2-1)+ny^{(n+1)}2x+n(n-1)y^{(n)}+y^{(n+1)}x+ny^{(n)}=0$$
$$(x^2-1)y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+n^2y^{(n)}=0$$

y para $x=0$ se reduce a $-y(0)^{(n+2)}+n^2y(0)^{(n)}=0$, o mejor $y(n) = (n-2)^2y^{(n-2)}$ depende si n es par o impar.

(c) Tenemos que

$$\begin{array}{ll} y(0)^{(8)} = 6^2y^{(6)} & y(0)^{(7)} = 5^2y^{(5)} \\ y(0)^{(6)} = 4^2y^{(4)} & y(0)^{(5)} = 3^2y^{(3)} \\ y(0)^{(4)} = 2^2y^{(2)} & y(0)^{(3)} = 1^2y^{(1)} \end{array}$$

pero $y(0)^{(2)}=0$ e $y(0)^{(1)}=1$, multiplicando hacia abajo en ambas columnas, para n par $y(0)^{(n)} = (n-2)(n-4)\ldots 6^2 4^2 2^2 y^{(2)}(0)$ y para n impar $y(0)^{(n)} = (n-2)(n-4)\ldots 5^2 3^2 1^2 y^{(1)}(0)$, finalmente $y(0)^{(2n)}=0$ y $y(0)^{(2n-1)} = 1^2 3^2 5^2 \ldots (2n-1)^2$