Capítulo 3

Integrales impropias

3.1. Introducción

Extenderemos la noción de integral a casos en los cuales f puede no ser acotada en $[a,b]$ y a integrales sobre intervalos infinitos

Definición 3.1.1 (Integral impropia de primera especie)**.** *Sea* $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$, *diremos que* f *es una funcion integrable en* $[a,\infty)$ *si:*

- f *es integrable en* $[a,b], a < b$.
- *El siguiente límite existe*
$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f$$

Ejemplo 3.1.2.
$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^b = 1.$$

Definición 3.1.3 (Integral impropia de segunda especie)**.** *Sea* $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ *una función no acotada, diremos que* f *es una funcion integrable en* $[a,b)$ *si:*

- f *es integrable en* $[a,x]$*, para todo* $a < x < b$.
- *El siguiente límite existe*
$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

Ejemplo 3.1.4.
$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{x\to 1^-}\int_0^x \ln x dx = 1.$$

Definición 3.1.5 (Integral impropia de tercera especie o mixta)**.** $f\colon [a,\infty) \to R$ *se dice de tercera especie si es de primera y de segunda especie.*

Ejemplo 3.1.6.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx + \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

3.1.1. Criterios de convergencia para integrales inpropias

Teorema 3.1.7 (Criterio de comparación)**.** *Sean f,g continuas en $[a,\infty)$ y supongamos que*

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,\infty)$$

entonces si

1. $\int\limits_0^\infty g$ *converge, entonces,* $\int\limits_0^\infty f$ *converge*
2. $\int\limits_0^\infty f$ *diverge, entonces,* $\int\limits_0^\infty g$ *diverge*

Un resultado análogo se obtiene para integrales inpropias de segunda especie.

Teorema 3.1.8 (Criterio del cuociente)**.** *Sean f y g funciones continuas y no negativas en $[a,\infty)$ y tal que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0$ entonces las integrales*

$$\int_a^\infty f \quad y \quad \int_a^\infty g$$

Convergen ambas o divergen ambas.

Obs: Analogamente podemos aplicar el resultado anterior a integrales de segunda especie.

Ejemplos Importantes

Ejemplo 3.1.9. *Analizar la convergencia de*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$$

para $\alpha > 0, a > 0$

Solución:

Notemos que si $\alpha \leq 0$ la integral es trivialmente convergente.

Si $\alpha = 1$ tenemos

$$\int_a^\infty \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \ln x|_a^b = +\infty.$$

Por otra parte para $\alpha \neq 1$ una primitiva del integrando corresponde a $\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, de esta forma se tiene lo siguiente

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^b$$

En resumen se tiene lo siguiente

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx : \begin{cases} \text{converge} & \alpha > 1 \\ \text{diverge} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 3.1.10. *Analizar la convergencia de*

$$\int_a^b \frac{a}{(b-x)^\alpha} dx$$

para $\alpha > 0$, $a < b$

Si $\alpha = 1$ tenemos

$$\int_a^b \frac{1}{b-x} dx = \lim_{y \to b^-} -\ln(b-y)\Big|_a^y = +\infty.$$

Por otra parte para $\alpha \neq 1$ una primitiva del integrando corresponde a $\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$, de esta forma se tiene lo siguiente

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx = \lim_{y \to b^-} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\alpha-1}\Big|_a^y$$

En resumen se tiene lo siguiente

$$\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx : \begin{cases} \text{converge} & \alpha < 1 \\ \text{diverge} & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Los ejemplos anteriores son muy importantes pues cada vez que queramos saber si una integral es convergente podemos utilizar el teorema 3.1.8 junto con las funciones anteriores para obtener utiles criterios de convergencia, de hecho se tiene el siguiente corolario cuya demostración se deja como ejercicio propuesto al estudiante.

Corolario 3.1.11. (Reglas de convergencia)

- *(Primera especie)*
  Si $\lim\limits_{x \to \infty} x^\alpha f(x) = L$ *entonces*

  1. $\int\limits_a^\infty f$ *converge si* $\alpha > 1$ *y* L *es finito*
  2. $\int\limits_a^\infty f$ *diverge si* $\alpha \leq 1$ *y* $L \neq 0$

- *(Segunda especie) (Suponemos que* $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \infty$ *o* $-\infty$*)*
  Si $\lim\limits_{x \to b^-} (b-x)^\alpha f(x) = L$ *entonces*

  1. $\int\limits_a^b f$ *converge si* $\alpha < 1$ *y* L *es finito*
  2. $\int\limits_a^b f$ *diverge si* $\alpha \geq 1$ *y* $L \neq 0$

Convergencia absoluta y condicional

1. Si $\int\limits_a^\infty |f|$ converge entonces se dirá que $\int\limits_a^\infty f$ es absolutamente convergente.
2. Si $\int\limits_a^\infty |f|$ diverge y $\int\limits_a^\infty f$ converge se dirá que $\int\limits_a^\infty f$ es condicionalmente convergente
3. Analogamente se define la convergencia absoluta y condicional para integrales inpropias de segunda especie.

Problemas

Problema 3.1. 1. *Considere la función definida por* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}}$ *y calcule, si existe, el área comprendida entre la curva, el eje* OX *y sus asintotas.*

2. *Sea* $\overline{x}$ *el punto mínimo local de* f. *Calcule, si existe, el volumen de revolución en torno al eje* OY *de la región comprendida entre la curva, el eje* OX *y las rectas* $x = 0$ *y* $x = \overline{x}$.

Solución:

1. Notemos que

$$\int_0^2 f(x)dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{(1)} + \underbrace{\int_1^2 f(x)dx}_{(2)}$$

Estudiemos (1). Es claro que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/2} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y luego como $\int_0^1 x^{-1/2}dx$ es convergente se tiene que (1) converge.

Para (2) se cumple que $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{2-x} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ como $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx$ es convergente se tiene que (2) también converge.

2. Es fácil verificar que $f'(\overline{x}) = 0$ para $\overline{x} = 1$, como además $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ se sigue que necesariamente $\overline{x} = 1$ es mínimo de f en $(0,2)$. De esta forma:

$$V_{OY} = 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{x}{\sqrt{x(2-x)}}dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(2-x)}}dx$$

este cálculo se deja al lector.

Problema 3.2. *Determinar los valores de* α *y* β *para los cuales la integral* $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}$ *es convergente.*

Ind: Realice el cambio de variables $x^\beta = t$.

Solución:

- Caso $\beta = 0$, se tiene que la integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$
- Caso $\beta > 0$, Realizando el cambio de variables $x^{\beta} = t$ se obtiene $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\beta t}$, además si $x = 1$ entonces $t = 1$ y si $x \to \infty$ entonces $t \to \infty$. De esta forma:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}(1+x^{\beta})} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{1}{\beta} \int_1^{\infty} \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+1}(1+t)} dt$$

  como

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+2}}{t^{\frac{\alpha-1}{\beta}+1}(1+t)} = 1$$

  la integral converge si y solo si $\frac{\alpha-1}{\beta} + 2 > 1$ esto es $\alpha + \beta > 1$.

- Caso $\beta < 0$, se deja al lector.

Problema 3.3. *Considere la integral impropia $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$. El proposito de este ejercicio es calcular I explicitamente. Para ello proceda como sigue.*

1. *Demuestre que I converge.*
2. *Calcule, si existe, el valor de la integral obtenida al rotar la función e^{-x^2}, $x > 0$ en torno al eje OY*
3. *Muestre, utilizando el método de cálculo de áreas por secciones, que el valor obtenido en la parte anterior es igual a $4I^2$ y concluya.*

Solución:

1. Notemos que si $x > 1$ entonces $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ como $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ converge entonces, por el criterio de comparación, se sigue que I converge.
2. Calculemos el volumen de revolución de la curva e^{-x^2} en torno al eje OY está dado por $V = \lim_{b\to\infty} 2\pi \int_0^b xe^{-x^2} dx$, realizando la sustitución $u = x^2$ se sigue que $\frac{du}{2} = x\,dx$ obtenemos entonces que

$$V = 2\pi \left. \frac{e^{-u}}{2} \right|_0^{\infty} = \pi$$

3. Es facil ver que, en el espacio tridimensional (X,Y,Z), la superficie definida por el volumen de revolución corresponde al gráfico de la función $f(x,y) = e^{-x^2} e^{-y^2}$. En efecto, por definición del sólido a todos los puntos del plano que esten a la misma distancia del origen le hacemos corresponder igual altura, esto es, dado un punto del plano $(x,y) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ la altura del sólido en ese punto corresponde a e^{-r^2} y como $r^2 = x^2 + y^2$ se sigue que $f(x,y)$ describe exactamente la superficie del volumen en cuestión.

Por argumentos de simetría el volumen del sólido es cuatro veces el volumen del octante positivo $(x > 0, y > 0)$. Para $x > 0$ fijo el área asociada corresponde a $A(x) = e^{-x^2} \int_0^\infty e^{-y^2} dy = e^{-x^2} I$ integrando sobre x se obtiene $V = 4\int_0^\infty A(x)dx = 4\int_0^\infty e^{-x^2} I dx = 4I^2$. Como $V = \pi$ se sigue, despejando el valor de I, que

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Capítulo 4

Series numéricas

4.1. Introducción

Definición 4.1.1. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, si la sucesión. $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ converge diremos que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

converge.
a_n se llamará término general de la serie.

Ejemplo 4.1.2. *Algunas series clásicas*

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$, *donde $x \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.*
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! = \operatorname{sen} x$, *donde $x \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.*
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}/(2n)! = \cos x$, *donde $x \in \mathbb{R}$ es un parámetro fijo.*
- $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n$ *que diverge.*

4.2. Series de términos no negativos

4.2.1. criterios de convergencia

Existen diversos criterios para analizar la convergencia de series de términos **no negativos**, los cuales analizaremos a continuacion.

Teorema 4.2.1 (Criterio del cuociente de términos generales)**.** *Sean $\{a_n\}_{n\in N}$ y $\{b_n\}_{n\in N}$ sucesiones tales que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n > 0$. Si el siguiente limite $L = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe y $L > 0$ entonces las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen ambas o divergen ambas. Si $L = 0$ y si $\sum b_n$ converge entonces se cumple que $\sum a_n$ converge.*

Teorema 4.2.2 (Criterio del cuociente (Dálambert))**.** *Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucecion tal que $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, Sea $R := \limsup_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ entonces:*

- *Si $R < 1$ la serie converge.*
- *Si $R > 1$ la serie diverge.*

Teorema 4.2.3 (Criterio de la raíz enésima)**.** *Sea $\{a_n\}_{n\in N}$ una sucesión, sea $R = \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$, entonces:*

- *Si $R < 1$ la serie converge.*
- *Si $R > 1$ la serie diverge.*

Observación*: Si el criterio del cuociente o de la raíz da como resultado $R = 1$ no es posible asegurar la convergencia o divergencia de la serie y, por lo tanto, es necesario utilizar otro tipo de argumentos para el análisis, como por ejemplo el criterio de la integral impropia que veremos a continuación.*

Teorema 4.2.4 (Criterio de la integral impropia.)**.** *Sea $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}^+$ una una funcion* **decreciente.** *Entonces $\sum_n f(n)$ converge si y solo si $\int_1^\infty f(x)dx$ converge.*

4.3. Series generales

Definición 4.3.1. *Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una suceción de números reales. Diremos que la serie $\sum_n a_n$ es absolutamente convergente si $\sum_n |a_n|$ es convergente.*

Definición 4.3.2. *Si la serie $\sum_n a_n$ es convergente pero $\sum_n |a_n|$ no lo es entonces decimos que la serie es condicionalmente convergente.*

Teorema 4.3.3. *Si la serie $\sum_n |a_n|$ es convergente entonces $\sum_n a_n$ converge.*

Teorema 4.3.4 (Criterio de Leibnitz)**.** *Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y convergente a cero (y por lo tanto se cumple trivialmente que $a_n \geq 0$)entonces la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ es convergente.*

Problemas

Problema 4.1. *Estudie la convergencia de las siguientes series:*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha\sqrt{j})}$ *para* $\alpha > 1$.
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ *(Ind: demuestre que* $\arctan(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$*)*
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n^2+1}$.
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

Solución:

1. Utilizando el *Criterio de la Raíz enésima* se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

   Como $L < 1$ se tiene que la serie converge.

2. Utilizando el *Criterio del Cuociente* se obtiene

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod_{j=1}^{n}(1+\alpha\sqrt{j}) \cdot \sqrt{(n-1)!}\sqrt{n}}{\sqrt{(n-1)!} \cdot \prod_{j=1}^{n}(1+\alpha\sqrt{j}) \cdot (1+\alpha\sqrt{n+1})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+\alpha\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

   Como $L = 1/\alpha < 1$ se tiene que la serie es convergente.

3. Mostremos que $\arctan(x) \leq x \quad \forall x \geq 0$. En efecto, sea $x > 0$, aplicando el teorema del valor medio a la función $t \mapsto \arctan(t)$ en el intervalo $[0,x]$, se demuestra la existencia de $\xi \in (0,x)$ tal que

$$\frac{\arctan(x)-\arctan(0)}{x} = \frac{1}{1+\xi^2} \leq 1$$

de donde se obtiene el resultado pedido. (para $x=0$ la propiedad se cumple trivialmente).

Utilizando lo anterior es claro que

$$0 \leq \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right) \leq \frac{1}{1+n+n^2}$$

como la serie $\sum_n \frac{1}{1+n+n^2}$ es convergente (¿por qué?), por el criterio de comparación, la serie $\sum_n \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ también lo es.

4. Usemos el criterio de la raiz n-ésima,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[n]{n^2+1}} = \sqrt{2}-1 < 1\ ,$$

en consecuencia la serie es convergente.

5. Como la sucesión $a_n = \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)}$ es claramente decreciente y no negativa usaremos el criterio de la integral, según el cual,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} \ \ \textit{converge} \iff \int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}\, dx \ \ \textit{converge}\ .$$

Para estudiar la integral usemos un cambio de variable,

$$u = x+2 \implies du = dx$$
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+2)\ln(x+2)}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{u \ln u}\, du = \ln(\ln u)\Big|_2^{\infty} = \infty\ ,$$

luego como la integral no converge, la serie en estudio es también no convergente.

6. Racionalizando el término general de la serie obtenemos,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ ,$$

vale decir, es una serie alternante donde el término central $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ es claramente decreciente a cero. En consecuencia, se cumplen todas las hipótesis del criterio de Leibniz y, por ende, la serie es convergente.

Problema 4.2. *Considere la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *donde* $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{k}}$.

1. *Calcule* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big/ a_n$

2. *Deduzca si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge o diverge.*

Solución:

1. Calculemos el límite propuesto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{k}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}}$$

   Notemos que el denominador del límite anterior corresponde a una suma de Riemann. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}\, x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{a_n} = \frac{3}{2}$$

2. Usando el criterio de división de términos generales, como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente y el límite de la parte i) fue finito, concluimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Capítulo 5

Series de potencias y sucesiones de funciones

5.1. Series de potencias

Definición 5.1.1. *Diremos que la serie de potencias* $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ *es convergente en* x *si el límite* $\lim_N \sum_{n=0}^N a_n x^n$ *existe.*

Al real R *tal que para* $|x-x_0| < R$, $\sum_n a_n(x-x_0)^n$ *es convergente y divergente para* $|x-x_0| > R$ *se le llama radio de convergencia y al intervalo* $\{x \mid \sum_n a_n(x-x_0)^n \text{es convergente}\}$ *se le denomina intervalo de convergencia.*

Los criterios de convergencia utilizados para el estudio de las series de potencias son análogos a los de las series numéricas.

Teorema 5.1.2 (Criterio del cuociente)**.** *Sea* $\{a_n\}_{n\in N}$ *una sucesión tal que* $a_n \neq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *Sea* $\frac{1}{R} := \limsup_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *entonces la serie de potencias* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *es convergente en el intervalo* $(-R+x_0, R+x_0)$ *y divergente en* $(-\infty, -R+x_0) \cup (R+x_0, \infty)$.

Teorema 5.1.3 (Criterio de la raíz enésima)**.** *Sea* $\{a_n\}_{n\in N}$ *una sucesión, sea* $\frac{1}{R} := \limsup_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$, *entonces la serie de potencias* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *es convergente en el intervalo* $(-R+x_0, R+x_0)$ *y divergente en* $(-\infty, -R+x_0) \cup (R+x_0, \infty)$.

Observación: en cualquier caso siempre es necesario analizar la convergencia en los extremos del intervalo, pues los criterios anteriores no funcionan en tales puntos.

Con frecuencia es necesario calcular la derivada de una serie o la integral de ella, para ello procedemos calculando la serie de las derivadas o la serie de las integrales respectivamente, esto es, intercambiamos la serie con el operador. Sin embargo, nada nos asegura que tal valor exista o incluso si existe no podemos determinar a priori si son iguales. Los siguientes teoremas nos las dan condiciones necesarias y suficientes para que se tenga la igualdad.

Teorema 5.1.4 (Intercambio de la serie con la derivada)**.** *Considere la serie de potencias* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *que suponemos absolutamente convergente en el intervalo* $(-R+x_0, R+x_0)$ *donde* R *es el radio de convergencia. Entonces la serie es derivable en dicho intervalo y se tiene*

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0} \frac{d}{dx} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=1} a_n n(x-x_0)^{n-1}.$$

Además la serie derivada posee el mismo radio de convergencia que la serie original.

Teorema 5.1.5 (Intercambio de la serie con la integral)**.** *Considere la serie de potencias* $\sum a_n(x-x_0)^n$ *que suponemos absolutamente convergente en el intervalo* $(-R+x_0, R+x_0)$ *donde* R *es el radio de convergencia. Entonces la serie es integrable en* $(-R+x_0, R+x_0)$ *y se tiene la igualdad:*

$$\int_a^b \sum_n a_n(x-x_0)^n = \sum_n \int_a^b a_n(x-x_0)^n = \sum_n a_n \left. \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \right|_a^b .$$

donde $a, b \in (-R+x_0, R+x_0)$.

Problemas

Problema 5.1. *Considere la serie de potencias:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

Determine su radio de convergencia e intervalo de convergencia.

Solución:

Resulta sencillo verificar (utilizando el criterio del cuociente o de la raiz) que el radio de convergencia es 2. En efecto,

$$\lim_n \frac{\ln(n+1)n}{(n+1)\ln n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto la serie es convergente en el intervalo $(-2, 2)$. Analizemos los extremos de dicho intervalo:

Al evaluar en $x=-2$ resulta la serie numérica $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ la cual es divergente, esta conclusión es directa de la aplicación del criterio de comparación de series numéricas. En efecto, para $n \geq 3$ se cumple $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ y como la serie $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge entonces la serie en cuestión debe diverger.

Evaluando en $x=2$ obtenemos la serie $\sum_n (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. Notemos que la sucesión $\frac{\ln n}{n}$ es decreciente y positiva. En efecto, si consideremos $f(x) = \ln(x)/x$ calculando la derivada de f obtenemos $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ como $f'(x) \leq 0$ para $x \geq e$ se sigue que la sucesión $f(n) = \frac{\ln n}{n}$ es decreciente para $n \geq 3$. De lo anterior se deduce que la serie $\sum_n (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ es convergente por el criterio de Leibnitz para series numéricas alternadas.

Concluimos entonces que el intervalo de convergencia de la serie de potencias en estudio es $(-2, 2]$.

Problema 5.2. *Calcular* $f(x) = \sum_1^\infty n^2 x^n$ *con* $-1 < x < 1$.

Solución: Es claro que la serie es absolutamente convergente para $-1 < x < 1$ y por lo tanto es válido:

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty n^2x^n &= x\sum_1^\infty n\frac{d(x^n)}{dx} = x\frac{d}{dx}\left(\sum_1^\infty nx^n\right)\\ &= x\frac{d}{dx}\left(x\sum_1^\infty \frac{d(x^n)}{dx}\right) = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\left(\sum_0^\infty x^n\right)\right)\\ &= x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)\right).\end{aligned}$$

Concluya el lector.

Problema 5.3. *1. Sea $0 < a < 1$, un parámetro fijo. Demuestre que*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Hint: Recuerde que $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^nx^n.$

2. Concluya que

$$\frac{\arctan(a)}{a} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

Solución:

1. Utilizando la indicación se tiene $\frac{1}{1+a^2t^2} = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n(a^2t^2)^n$ la cual es absolutamente convergente para $a^2t^2 < 1$.

   Integrando la serie se obtiene

$$\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^na^{2n}\int_0^1 t^{2n}dt = \sum_{n=0}^\infty (-1)^na^{2n}\left.\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^1 = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{a^{2n}}{2n+1}.$$

2. Para concluir es necesario calcular $\int_0^1 \frac{1}{1+a^2t^2}dt$ lo cual se deja al lector.

5.2. Sucesiones de funciones

Definición 5.2.1. *Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge puntualmente a una función f si para cada x (fijo) se tiene $\lim_n f_n(x) = f(x)$*

Definición 5.2.2. *Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a una función f si $\lim_n \sup_x |f_n(x) - f| = 0$*