Problemas

Problema 2.29. *Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,b]$ y $f'(x)$ continua y de signo constante en $[a,b]$. demuestre que*

$$\exists \xi \in (a,b) \text{ tal que } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

Para esto considere la función $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ y proceda como sigue:

1. *Integre por partes $\int_a^b f(x)g(x)dx$ y recuerde que $G(x)$ es primitiva de $g(x)$.*
2. *Aplique el Teorema del Valor Medio Generalizado (TVMG) para integrales a la integral resultante de la integración por partes.*
3. *Concluya.*

Solución:

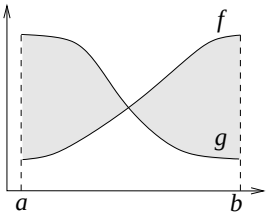
1. Integrando por partes
   $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$, $dv = g(x)dx \Rightarrow v = \int_a^x g(x)\,dx = G(x)dx$ luego
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)\int_a^x g(x)\,dx\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$
2. Consideremos $\int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ Como f' no cambia de signo y f, g son continuas entonces aplicando el teorema del valor medio generalizado para integrales se obtiene
   $$\exists\, \xi \in [a,b] \text{ tal que } \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx = G(\xi)(f(b)-f(a))$$
3. utilizando las partes anteriores se obtiene
   $$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(x)\,dx - G(\xi)(f(b)-f(a))$$
   Notando que $\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^\xi g(x)\,dx + \int_\xi^b g(x)\,dx$ se tiene el resultado pedido
   $$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx - G(\xi)(f(b)-f(a)) \\ &= f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx - (f(b)-f(a))\int_a^\xi g(x)\,dx \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx\end{aligned}$$

2.5. Aplicaciones

Cálculo de áreas

Area entre dos curvas f y g :

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



Ejemplo: Calcular el área de $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y 2π

$$A = \int_0^{2\pi} |\operatorname{sen} x|dx = \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 4.$$

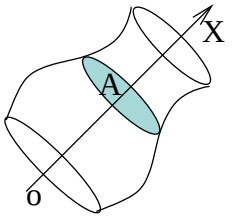
Ejemplo: Calcular el área de la circunferencia de radio 1.
El área del circulo corresponde a $4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$. haciendo el cambio de variables $\operatorname{sen}\varphi = x$ se obtiene

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\varphi)}\cos\varphi\, d\varphi \\ &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} d\varphi \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Cálculo de Volúmenes

Volumen de un sólido con área de cada sección perpendicular a un eje fijo.

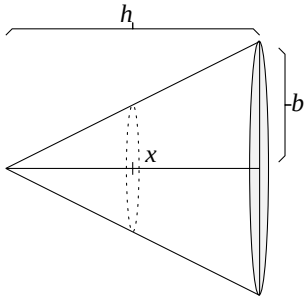
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$



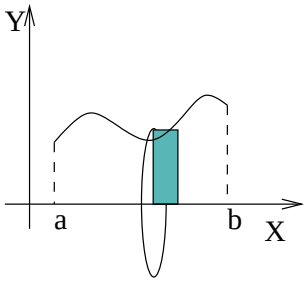
Ejemplo: Calcular el volumen del cono de altura h y base b

La sección del cono es un circulo de radio $\frac{bx}{h}$ (ver figura), por lo tanto su área es $\pi\left(\frac{bx}{h}\right)^2$. El volumen del cono corresponde a

$$\int_0^h \pi\left(\frac{bx}{h}\right)^2 dx = \pi\frac{b^2h}{3}.$$

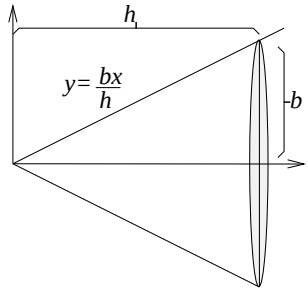


Volumen de un sólido de revolución en torno al eje OX (Método de los cilindros)



$$V_{OX} = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

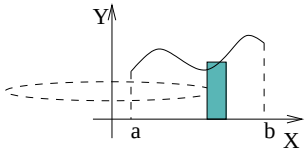
Ejemplo: Calcular el volumen del cono de altura h y base b



Procedemos a rotar la recta de ecuación $y = \frac{bx}{h}$ en torno al eje OX, para x comprendido entre 0 y h. el volumen de revolución es, segun la fórmula anterior,

$$V_{OX} = \pi \int_0^h y^2(x)\,dx = \pi \int_0^h \left(\frac{bx}{h}\right)^2 dx.$$

Volumen de un sólido de revolución en torno al eje OY (Método de la cáscara)



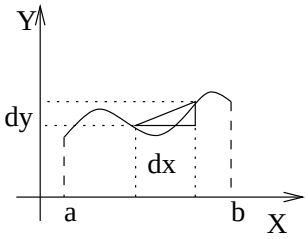
$$V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$$

Volumen de revolución entre dos curvas ($f \geq g$)

$$\begin{aligned} V_{OX} &= \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))dx \\ V_{OY} &= 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx \end{aligned}$$

Longitud de arco

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

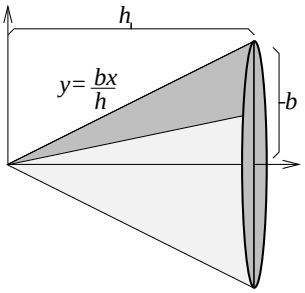


Superficie de revolución

$$S_{OX} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

Ejemplo: Calcular el área del manto del cono de altura h y base b

Procedemos a rotar la recta de ecuación $y=\frac{bx}{h}$ en torno al eje OX, para x comprendido entre 0 y h. el área del solido es, segun la fórmula anterior,

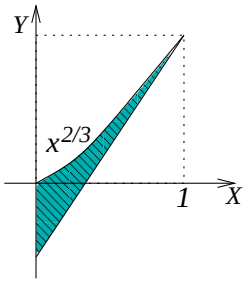


$$\begin{aligned} S_{OX} &= 2\pi \int_0^h y\sqrt{1+(y')^2(x)}\,dx \\ &= 2\pi \int_0^h \frac{bx}{h}\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}\,dx \\ &= \pi b\sqrt{b^2+h^2}. \end{aligned}$$

Problemas

Problema 2.30. *Calcular el volumen del sólido generado por la rotación, en torno del eje OY, de la región limitada por la curva $y=x^{\frac{2}{3}}$, su tangente en el punto $x=1$ y el propio eje OY.*

Solución:

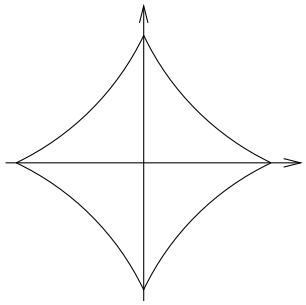


La pendiente de la recta tangente en el punto $x=1$ esta dada por $y'(1)$ como $y'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$, se sigue que $y'(1)=\frac{2}{3}$. Por lo tanto, la recta tangente está dada por la función la función $y-1=\frac{3}{2}(x-1)$. Se obtiene la siguiente figura

Para calcular el volumen utilizaremos el método de la cáscara

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^1 x\left(x^{3/2}-\left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\right)\right)dx \\ &= 2\pi \int_0^1 x^{5/2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x\,dx \\ &= 2\pi\left[\frac{2}{7}x^{7/2}-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1 = \frac{\pi}{14}. \end{aligned}$$

Problema 2.31. *Dada la curva cerrada de ecuación:*



(2.22) $$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

1. *Determine su perímetro.*
2. *Calcular el volumen de revolución en torno al eje OX de la región del primer cuadrante.*

Solución:

1. Dada la simetría de la figura solo calculamos el largo de la curva en el primer cuadrante. Notemos que para calcular el largo de curva es necesario conocer el valor de $(y')^2$. derivando implicitamente la ecuación 2.22 obtenemos

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} &= 1 \qquad \left|\frac{d}{dx}\right. \\ \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}y' &= 0 \end{aligned}$$

despejando y' de la ecuación anterior se deduce que $y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 1+(y')^2 &= 1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

finalmente la longitud del astroide esta dada por

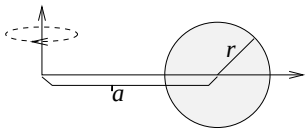
$$l = 4\int_0^1 \sqrt{1+(y')^2}dx = 4\int_0^1 x^{\frac{-1}{3}} = 6.$$

2. El volumen de revolución corresponde a $V = \pi\int_0^1 y^2dx$ desarrollando esta integral

$$\begin{aligned} \int_0^1 y^2dx &= \int_0^1 \left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^2 \\ &= \int_0^1 1-2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}dx \end{aligned}$$

El cálculo de la primitiva anterior es directo y quedará como ejercicio propuesto para el lector.

Problema 2.32. *Calcule el volumen del toro. Un toro es un volumen de revolución, consiste en rotar en torno al eje OY la circunferencia de radio r centrada en el punto $(a,0)$, $a > r$. Como lo indica la figura*



Solución: Por la simetría de la figura calcularemos solo el volumen de la parte superior del toro esto es $y > 0$. Es claro que el círculo de radio r centrado en el punto $(a,0)$ esta definido por la ecuación $(x-a)^2+y^2 = r^2$. La función que describe la parte superior del circulo corresponde entonces a $y = \sqrt{r^2-(x-a)^2}$, rotanto esta función en torno al eje OY obtenemos

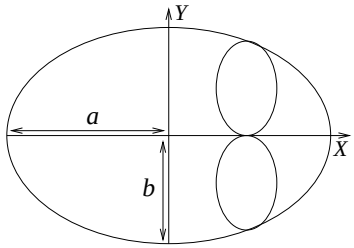
$$V_{OY} = 2\pi\int_{a-r}^{a+r} x\sqrt{r^2-(x-a)^2}dx$$

para resolver esta integral realicemos el cambio de variables $u = x-a$, de esta forma

$$V_{OY} = 2\pi\left\{\int_{-r}^{r} u\sqrt{r^2-u^2}du + a\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-u^2}du\right\}$$

La primera de estas integrales es 0 pues corresponde a la integracion de una función impar sobre un intervalo simétrico. Para calcular la segunda podemos comenzar por hacer el cambio de variables recomendado para este tipo de situaciones $u = r\operatorname{sen}\varphi$ o bien $u = r\cos\varphi$. sin embargo basta notar que la integral que se pide corresponde exactamente al área de la mitad de la circunferencia y por lo tanto su valor es de $\frac{\pi r^2}{2}$. (un buen ejercicio para el estudiante es hacer este cálculo completo). Se tiene entonces que $V_{OY} = \pi r^2 a$ y por lo tanto $V_{\text{toro}} = 2\pi^2 r^2 a$

Problema 2.33. *Una marraqueta es un sólido que tiene por base una elipse de semiejes a y b, y cada sección de este sólido corresponde a una circunferencia como se indica en la figura.*
Calcule el volumen de la marraqueta.



Solución:

Por simetría $V(marraqueta) = 4 \cdot V(R)$ donde R es la región definida por el primer cuadrante (figura 2.2). Calculemos $V(R)$

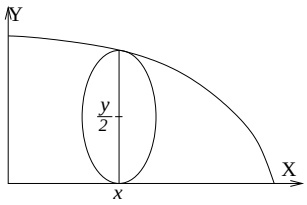


Figura 2.2: primer cuadrante

Dado $x \geq 0$ es tiene que el área de la circunferencia de centro $(x, y/2)$ y radio $y/2$ esta dado por $A(x) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2$ y como $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ se cumple que $A(x) = \frac{\pi b^2 (a^2 - x^2)}{4a^2}$ y por lo tanto

$$V(R) = \int_0^a A(x)dx = \frac{\pi b^2}{4a^2} \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx.$$