Trabajo Dirigido 2: MA1A2 Cálculo Diferencial

Profesor: Miguel Carrasco
Auxiliar: Germán Ibarra

24 de Septiembre de 2007

Problema 1.- (*Primitivas*)

(a) Sea $I_n = \displaystyle\int \frac{\cos(nx)}{(\cos(x))^n} dx$

  i) Calcule I_1 y I_2

  ii) Calcular
$$\int \frac{\sin(x)}{(\cos(x))^{n+1}} dx$$

  (iii) Encontrar una recurrencia para expresar I_{n+1} en funcion de I_n

(b) Calcular la Primitiva
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx$$

Pregunta 2.- *(Sumas de Riemann)*

(a) Sea $a_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} [\ln(n+i) - \ln(n)]$.

  i) Identifique a_n como una suma de Riemann, determinando la función y la partición involucradas.

  ii) Calcule $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ usando la integral apropiada.

(b) Demuestre que
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right).$$

(**Ind:** Considere la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$).

Pregunta 3.-*(Integral de Riemann y Teorema Fundamental del Calculo)*

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable, verificando que $f((a+b)-x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

(a) Probar que $\int_a^b xf(x) = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)$

(b) Sea ahora $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ continua. Pruebe que $\int_0^\pi xg(\sin(x)) = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi g(\sin(x))$.

(c) Deduzca que $\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)} = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}$ y calcule el valor de la integral.

Problema 4.- *(Desarrollo de Taylor)*

Aproximar la función $f(x) = x\ln(1+x)$ por un polinomio de Taylor de orden 3 y estimar el error que se comete al calcular $\ln(\sqrt{\frac{3}{2}})$ usando esa aproximación