# Auxiliar #9 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

## 1 Resumen

### 1.1 La Integral de *Riemann*

Diremos que $f$ es *Riemann*-integrable en $[a, b]$ ssi $\int\limits_{\underline{a}}^{b} f = \int\limits_{a}^{\overline{b}} f$. en tal caso el valor común se llamará integral de $f$ en $[a, b]$ y lo notaremos simplemente $\int\limits_a^b f$

**Teorema 1.1 (Condición de *Riemann*)** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, $f$ es integrable ssi*

$$(\forall\ \varepsilon > 0)(\exists\ P \in \mathcal{P}_{[a,b]})\ \ (S(f, P) - s(f, P)) \leq \varepsilon$$

**Propiedades de la Integral.** Si $f$ y $g$ son integrables en el intervalo $[a, b]$ entonces:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$
3. $\int\limits_a^b cf(x)dx = c\int\limits_a^b f(x)dx$
4. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$
5. $\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$

## 1.2 Teorema del valor medio para integrales

**Definición 1.1** *Se llama valor medio de $f$ sobre $[a,b]$ al número real*

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

**Teorema 1.2 (Teorema del valor medio para integrales)** *Si $f$ es continua en $[a,b]$ entonces*

$$\exists\ \xi \in [a,b] \ \textit{tal que}\ f(\xi)(b-a) = \int_a^b f$$

**Teorema 1.3 (Teorema del valor medio generalizado para integrales)** *Si $f$ es continua en $[a,b]$ y $g$ es continua en $[a,b]$ que no cambia de signo entonces*

$$\exists\ \xi \in [a,b] \ \textit{tal que}\ \int_a^b f\cdot g = f(\xi)\int_a^b g$$

## 1.3 Teorema Fundamental del Cálculo

**Teorema 1.4 (Teorema Fundamental del Cálculo)**

- *Sea $G(x) = \int\limits_a^x f$ donde $f$ es una función continua (luego integrable) en $I$. ($a \in I$, $x \in I$)*
  *Entonces $G$ es diferenciable sobre $I$ y ademas $G'(x) = f(x)$*
- *Si $f$ integrable en $[a,b]$ y existe $F$ tal que $F' = f$ en $[a,b]$ entonces*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \qquad \textit{notación}\ \int_a^b f = F(x)\Big|_a^b$$

## 2 Problemas

P1. Sea $f(x) = x^m \quad m \leq 1$. Calcular $\underline{\int_a^b}, \overline{\int_a^b}$ con $a = 1$.

Ind: Considere $\mathcal{P} = 1, b^{\frac{1}{n}}, \ldots, b^{\frac{n-1}{n}}, b$

P2. Calcule $\int_a^b e^{\alpha x}$ con $a < b$ usando una partición equiespaciada.

P3. Dada la partición $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ del intervalo $[1, e]$ con $x_k = e^{\frac{k}{n}}$ y la función $f(x) = \ln(x)$. Calcular:

1. $S(f, \mathcal{P})$ y $s(f, \mathcal{P})$.

$$\text{Ind: } \sum_{k=1}^{n} ka^k = \frac{1}{1-a}\left\{1 - (n+1)a^n + \frac{a(1-a^n)}{1-a}\right\}$$

2. Usando 1. concluya que $f$ es integrable en $[1, e]$ y calcule $\int_1^e \ln(x)dx$.

P4.
1. Sea $a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i) - \ln(n)]$.
   (a) Identifique $a_n$ como una suma de *Riemann* determinando la función y la partición involucradas.
   (b) Calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$ usando la integral apropiada.
2. Demuestre que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}} + \frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)$$

Ind: Considere la partición $\mathcal{P} = \{0, 1/2, 1\}$.

P5. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

1. Explique porqué $(a_n)$ está bien definida, es decir, porqué $q^n$ es *Riemann* integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.
2. Calcule las sumas de *Riemann* inferior y superior para $q^n$ y la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, \ldots, n\}$.
3. Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para $(a_n)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}$$

4. Concluya que $(a_n)$ converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

P6. 1. Sea $f(x)$, dada por: $f(x) = \int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)dt$, demostrar que se cumple:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3} = 2f(x)$$

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \left(\pi \frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

Ind: Considere una suma de *Riemann* en el intervalo $[0,\pi]$.

P7. Sea $f$ una función derivable en $[a,b]$ y tal que $|f'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$.

1. Use el teorema del valor medio para deducir que:

$$\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

2. Demuestre a partir de 1. que $f$ es integrable en $[a,b]$.
3. Verifique que $\forall \mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[S(f,\mathcal{P}) + s(f,\mathcal{P})] \right| \leq \frac{1}{2} K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

P8. 1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,b]$ y $f'(x)$ continua y de signo constante en $[a,b]$. demuestre que

$$\exists \xi \in (a,b) \text{ tal que } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^\xi g(x)dx + f(b)\int_\xi^b g(x)dx.$$

Para esto considere la función $G(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$ y proceda como sigue:

(a) Integre por partes $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ y recuerde que $G(x)$ es primitiva de $g(x)$.

(b) Aplique el Teorema del Valor Medio Generalizado (TVMG) para integrales a la integral resultante de la integración por partes.

(c) Concluya.

2. Pruebe que $\int\limits_0^\pi x\Phi(\operatorname{sen}(x))dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \Phi(\operatorname{sen}(x))dx$. Ind: use $y = \pi - x$)

Ocupe este resultado para encontrar el valor de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$

P9. Analice la función $g(x) = \int\limits_0^x (t-1)e^{-t^2}dt$

P10. 1. Calcule $\lim\limits_{s\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int\limits_0^x e^{t^2}dt$

2. Sea $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $G(y) = \int\limits_1^2 \frac{\operatorname{sen}(ty)}{t}dt$. Calcule $G'(y)$

Ind: considere el cambio de variables $u = t \cdot y$

## 3 Soluciones

P1. Sea $f(x) = x^m \quad m \leq 1$. Calcular $\underline{\int_a^b}, \overline{\int_a^b}$ con $a = 1$.

Ind: Considere $\mathcal{P} = \{1, b^{\frac{1}{n}}, \ldots, b^{\frac{n-1}{n}}, b\}$
Sol: $s(f, \mathcal{P}) = \sum m_i \cdot \Delta x_i$ con $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Notando que $m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = x_{i-1}^m$ se obtiene

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}^m \Delta x_i$$

analogamente

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^m \Delta x_i$$

Calculemos $S(f, \mathcal{P})$ con $\mathcal{P} = \{1, b^{\frac{1}{n}}, \ldots, b^{\frac{n-1}{n}}, b\}$
$x_i = b^{i/n}$

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} b^{\frac{im}{n}} \left(b^{\frac{i}{n}} - b^{\frac{(i-1)}{n}}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b^{\frac{im}{n}} b^{\frac{i}{n}} \left(1 - b^{\frac{-1}{n}}\right) \\ &= \left(1 - b^{\frac{-1}{n}}\right) \sum_{i=1}^{n} b^{\frac{i(m+1)}{n}} \end{aligned}$$

recordemos que $\sum\limits_{i=1}^{n} q^i = q \sum\limits_{i=0}^{n-1} q^i = q\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ en este caso $q = b^{\frac{m+1}{n}}$ luego

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}) &= \left(1 - b^{\frac{-1}{n}}\right) b^{\frac{(m+1)}{n}} \left(\frac{1 - b^{m+1}}{1 - b^{\frac{m+1}{n}}}\right) \\ &= \left(b^{m+1} - 1\right) \frac{1 - b^{\frac{-1}{n}}}{b^{\frac{m+1}{n}} - 1} \end{aligned}$$

finalmente tomando límite

$$\lim_{|\mathcal{P}| \to 0} S(f, \mathcal{P}) = \lim_{n \to \infty} \left(b^{m+1} - 1\right) \frac{1 - b^{\frac{-1}{n}}}{b^{\frac{m+1}{n}} - 1} = \frac{b^{m+1} - 1}{m+1} = \overline{\int_a^b} f$$

P2. Calcule $\int\limits_a^b e^{\alpha x}$ con $a<b$ usando una partición equiespaciada.

Sol: Como $f(x)=e^{\alpha x}$ es continua luego integrable, basta calcular $s(f,\mathcal{P})$ o $S(f,\mathcal{P})$ y luego tomar límite.
$\mathcal{P}$ eqiespaciada $\Rightarrow$ $x_0=a$, $x_n=b$ y $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$ de esta forma se tiene que $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$. Como $f$ es creciente entonces $M_i=\sup\{f(x)|x\in[x_{k-1},x_k]\}=f(x_k)$

$$S(f,\mathcal{P})=\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha x_k}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha(a+\frac{b-a}{n}k)}\cdot\frac{b-a}{n}$$
$$\begin{aligned}S(f,\mathcal{P})&=\Big(\frac{b-a}{n}\Big)e^{\alpha a}\sum_{k=1}^{n}e^{\alpha\frac{b-a}{n}k}\\&=\Big(\frac{b-a}{n}\Big)e^{\alpha a}\sum_{k=1}^{n}\Big(e^{\alpha\frac{b-a}{n}}\Big)^k\end{aligned}$$

recordemos que $\sum\limits_{i=1}^{n}q^i=q\sum\limits_{i=0}^{n-1}q^i=q\big(\frac{1-q^n}{1-q}\big)$ en este caso $q=e^{\alpha\frac{b-a}{n}}$ luego

$$\begin{aligned}S(f,\mathcal{P})&=\Big(\frac{b-a}{n}\Big)e^{\alpha a}\left(e^{\alpha\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1-e^{\alpha(b-a)}}{1-e^{\alpha\frac{b-a}{n}}}\right)\right)\\&=e^{\alpha a}\big(e^{\alpha(b-a)}-1\big)\left(\frac{\frac{b-a}{n}e^{\alpha\frac{b-a}{n}}}{e^{\alpha\frac{b-a}{n}}-1}\right)\end{aligned}$$

finalmente tomando límite

$$\begin{aligned}\lim_{|\mathcal{P}|\to 0}S(f,\mathcal{P})&=\lim_{n\to\infty}e^{\alpha a}\big(e^{\alpha(b-a)}-1\big)\left(\frac{\frac{b-a}{n}e^{\alpha\frac{b-a}{n}}}{e^{\alpha\frac{b-a}{n}}-1}\right)\\&=e^{\alpha a}\big(e^{\alpha(b-a)}-1\big)\lim_{u\to 0}\left(\frac{ue^{\alpha u}}{e^{\alpha u}-1}\right)\\&=e^{\alpha a}\big(e^{\alpha(b-a)}-1\big)\alpha\\&=\alpha e^{\alpha b}-\alpha e^{\alpha a}\end{aligned}$$

P3. Dada la partición $\mathcal{P}=\{x_0,x_1,\ldots x_n\}$ del intervalo $[1,e]$ con $x_k=e^{\frac{k}{n}}$ y la función $f(x)=\ln(x)$. Calcular:

1. $S(f,\mathcal{P})$ y $s(f,\mathcal{P})$.

$$\text{Ind: }\sum_{k=1}^{n}ka^k=\frac{1}{1-a}\left\{1-(n+1)a^n+\frac{a(1-a^n)}{1-a}\right\}$$

2. Usando 1. concluya que $f$ es integrable en $[1,e]$ y calcule $\int\limits_1^e\ln(x)dx$.

Sol:

1. Sea $f(x)=\ln(x)$ usando la partición $\mathcal{P}=\{1,e^{\frac{1}{n}},\ldots,e\}$ se obtiene

$$x_k=e^{\frac{k}{n}}\quad k=0,\ldots,n\quad \Delta x_k=e^{\frac{k}{n}}-e^{\frac{k-1}{n}}=e^{\frac{k-1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

$$\begin{aligned} M_i=\sup\{f(x)|x\in[x_{k-1},x_k]\} &= \ln(x_k)=\frac{k}{n}\\ m_i=\inf\{f(x)|x\in[x_{k-1},x_k]\} &= \ln(x_{k-1})=\frac{k-1}{n}\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{P}) &= \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(k-1)e^{\frac{k-1}{n}}\\ S(f,\mathcal{P}) &= \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

Calculemos $S(f,\mathcal{P})$ utilizando la indicación (con $a=e^{\frac{1}{n}}$) se obtiene

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) &= -\frac{1}{n}\left\{1-(n+1)e+\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}\right\}\\ &= -\left(\frac{1}{n}-\frac{(n+1)}{n}e-\frac{e^{\frac{1}{n}}(1-e)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}\right)\end{aligned}$$

2. Notando que $n(e^{\frac{1}{n}}-1)\to 1$ tomando $\lim\limits_{n\to\infty}S(f,\mathcal{P})$ se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}S(f,\mathcal{P})=1$$

analogamente se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}s(f,\mathcal{P})=1$$

llamando $\mathcal{P}_n=\{1,e^{\frac{1}{n}},\ldots,e\}$, entonces dado $\varepsilon\geq 0$ se tiene que $\exists\, n_1\in\mathbb{N}$ tq.

$$|S(f,\mathcal{P}_{n_1})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

analogamente $\exists\, n_2\in\mathbb{N}$ tq

$$|s(f,\mathcal{P}_{n_2})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

para $n\geq\max\{n_1,n_2\}$ se tiene que

$$|S(f,\mathcal{P}_n)-s(f,\mathcal{P}_n)|\leq|S(f,\mathcal{P}_{n_1})-1|+|s(f,\mathcal{P}_{n_2})-1|\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

luego $f$ es Riemann integrable y por lo tanto

$$\int_1^e\ln(x)dx=1$$

(Notemos que si usámos el hecho que $f$ es continua el resultado es directo).

P4. 1. Sea $a_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\ln(n+i)-\ln(n)]$.

(a) Identifique $a_n$ como una suma de *Riemann* determinando la función y la partición involucradas.

(b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ usando la integral apropiada.

2. Demuestre que

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\frac{1}{e}) \leq \int_0^1 e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

Ind: Considere la partición $\mathcal{P}=\{0,1/2,1\}$.

Sol:

1.

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\ln(n+i)-\ln(n)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(\frac{n+i}{n})$$

luego $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}$ que representa una suma de Riemann de una partición equiespaciada del intervalo $[1,2]$.

2. por ser $a_n$ suma de Riemann entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_1^2 \ln(x)dx$$

integrando por partes se obtiene que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x(\ln x - 1)\Big|_1^2$$

3. Calculemos $s(f,\mathcal{P})$ y $S(f,\mathcal{P})$ para $\mathcal{P}=\{0,\frac{1}{2},1\}$.
Notemos que $f$ es decreciente luego

$$\inf\{f(x)\,|\,x\in[x_1,x_{i+1}]\} = f(x_{i+1})$$

y

$$\sup\{f(x)\,|\,x\in[x_1,x_{i+1}]\} = f(x_i)$$

por lo tanto

$$s(f,\mathcal{P}) = \frac{1}{2}e^{-(\frac{1}{2})^2}+\frac{1}{2}e^{-1} = \frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}+\frac{1}{e})$$

por otra parte:

$$S(f,\mathcal{P}) = \frac{1}{2}e^{0}+\frac{1}{2}e^{-(\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt[4]{e}})$$

finalmente notemos que $\forall\mathcal{P}$ partición $s(f,\mathcal{P}) \leq \int f \leq S(f,\mathcal{P})$ lo que permite concluir.

P5. Considere la sucesión $a_n = \int\limits_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

1. Explique porqué $(a_n)$ está bien definida, es decir, porqué $q^n$ es *Riemann* integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.
2. Calcule las sumas de *Riemann* inferior y superior para $q^n$ y la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, \ldots, n\}$.
3. Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para $(a_n)$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x dx < \frac{1}{1-q}$$

4. Concluya que $(a_n)$ converge y que $a = \lim a_n$ satisface

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$

Sol:

1. $a_n$ está bien definida pues para $q > 0$ la función $f(x) = q^x$ es continua en $\mathbb{R}$ luego integrable en $[0, n]$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Veamos qu $a_n$ es creciente, en efecto

$$a_{n+1} - a_n = \int_n^{n+1} q^x\, dx > 0$$

luego $a_n$ es creciente estricta.

2. Notemos que como $0 < q < 1$ entonces la función $f(x) = q^x$ es decreciente luego usando la partición $\mathcal{P} = \{0, 1, \ldots, n\}$ se obtiene $x_i = i \quad i = 0, \ldots, n \quad \Delta x_i = 1$

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x \in [i-1, i]\} = q^{i-1}$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x \in [i-1, i]\} = q^i$$

por lo tanto

$$s(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} q^i = q\sum_{i=0}^{n-1} q^i = q\frac{1-q^n}{1-q}$$
$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} q^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{1-q^n}{1-q}$$

3. notando que $s(f, \mathcal{P}) \leq \int\limits_0^n q^x dx \leq S(f, \mathcal{P})$ se obtiene

$$q\frac{1-q^n}{1-q} \leq \int_0^n q^x\, dx \leq \frac{1-q^n}{1-q}$$

lo cual permite concluir.

4. $a_n$ es una sucesión creciente y acotada luego converge, aplicando límite a la desigualdad anterior se obtiene el resultado.

P6. 1. Sea $f(x)$, dada por:$f(x)=\int\limits_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$, demostrar que se cumple:

$$\frac{d^3 f(x)}{dx^3}=2f(x)$$

2. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

Ind: Considere una suma de *Riemann* en el intervalo $[0,\pi]$.

Sol:

1. $f(x)=x^2\int\limits_0^x f(t)\,dt-2x\int\limits_0^x tf(t)\,dt+\int\limits_0^x t^2 f(t)\,dt$ , utilizando el teorema fundamental del cálculo se obtiene

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x\int\limits_0^x f(t)\,dt+x^2 f(x)-2\int\limits_0^x tf(t)\,dt-2x^2 f(x)+x^2 f(x)\\
&= 2x\int\limits_0^x f(t)\,dt-2\int\limits_0^x tf(t)\,dt\\
f''(x) &= 2\int\limits_0^x f(t)\,dt+2xf(x)-2xf(x)\\
&= 2\int\limits_0^x f(t)\,dt\\
f'''(x) &= 2f(x)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\\
&= \frac{1}{\pi}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Esta es una suma de Riemann para una partición equiespaciada de la función $\ln(1+x^2)$ la cual es continua en $[0,\pi]$ luego integrable entonces la suma converge

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{\pi-0}{n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln(1+x^2)dx$$

Una primitiva de $\ln(1+x^2)$ es $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$ luego por T.F.C se tiene

$$\int_0^{\pi} \ln(1+x^2)dx = \pi\ln(1+\pi^2) - 2\pi + 2\arctan\pi$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\pi\frac{k}{n}\right)^2\right)\frac{\pi}{n} = \ln(1+\pi^2) - 2 + \frac{2}{\pi}\arctan\pi$$

P7. Sea $f$ una función derivable en $[a,b]$ y tal que $|f'(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$.

1. Use el teorema del valor medio para deducir que:

$$\forall\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]} \quad S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) \leq K|\mathcal{P}|(b-a)$$

2. Demuestre a partir de 1. que $f$ es integrable en $[a,b]$.
3. Verifique que $\forall\mathcal{P} \in \mathcal{P}_{[a,b]}$

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \frac{1}{2}[S(f,\mathcal{P}) + s(f,\mathcal{P})]\right| \leq \frac{1}{2}K\|\mathcal{P}\|(b-a)$$

Sol:

1. Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a,b]$ ($\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$) se tiene

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum M_i(f)\cdot\Delta x_i - \sum m_i(f)\cdot\Delta x_i = \sum(M_i - m_i)\cdot\Delta x_i$$

Como $f$ es continua (pues $f$ es diferenciable) en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existirán puntos $x_i'$ y $x_i''$ ($x_i' \neq x_i''$) tal que $f(x_i') = M_i$ y $f(x_i'') = m_i$ luego aplicando el T.V.M (Para la derivada) se tiene que existe $\xi_i$ entre $x_i'$ y $x_i''$ tal que

$$M_i(f) - m_i(f) = f(x_i') - f(x_i'') = |f'(\xi_i)||x_i' - x_i''|$$

sumando sobre todos estos subintervalos

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{n} |f'(\xi_i)||x_i' - x_i''|\Delta x_i$$

como $|f'(\bar{x}_i)| \leq K$, $|x_i' - x_i''| \leq \|\mathcal{P}\|$ se obtiene

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &\leq \sum_{i=1}^{n} K\|\mathcal{P}\|\Delta x_i \\ &= K\|\mathcal{P}\|\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i \\ &= K\|\mathcal{P}\|(b-a) \end{aligned}$$

2. la propiedad 1. prueba que $f$ es integrable en $[a,b]$ ya que podemos elegir $\mathcal{P}$ tq. $K\|\mathcal{P}\|(b-a) \leq \varepsilon$ y con esto se tiene que $f$ satisface la condición de *Riemann*

3. Sabemos que

$$s(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f \leq S(f,\mathcal{P})$$

sumando $-\frac{1}{2}(S(f,\mathcal{P})+s(f,\mathcal{P}))$ a esta inecuación

$$\frac{1}{2}s(f,\mathcal{P})-\frac{1}{2}S(f,\mathcal{P}) \leq \int_a^b f - \frac{1}{2}\big(S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})\big) \leq \frac{1}{2}S(f,\mathcal{P})-\frac{1}{2}s(f,\mathcal{P})$$

finalmente

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(S(f,\mathcal{P})+s(f,\mathcal{P}))\right| &\leq \frac{1}{2}\big(S(f,\mathcal{P})-s(f,\mathcal{P})\big) \\ &\leq \frac{1}{2}K\|\mathcal{P}\|(b-a) \end{aligned}$$

P8. 1. Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,b]$ y $f'(x)$ continua y de signo constante en $[a,b]$. demuestre que

$$\exists \xi \in [a,b] \text{ tal que } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)dx + f(b)\int_{\xi}^b g(x)dx.$$

Para esto considere la función $G(x)=\int\limits_a^x g(t)dt$ y proceda como sigue:

(a) Integre por partes $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx$ y recuerde que $G(x)$ es primitiva de $g(x)$.

(b) Aplique el Teorema del Valor Medio Generalizado (TVMG) para integrales a la integral resultante de la integración por partes.

(c) Concluya.

2. Pruebe que $\int\limits_0^{\pi} x\Phi(\operatorname{sen}(x))dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_0^{\pi}\Phi(\operatorname{sen}(x))dx$. (Ind: use $y=\pi-x$)

Ocupe este resultado para encontrar el valor de $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+\cos^2(x)}$

Sol:

1. (a) Integrando por partes

$u=f(x) \;\Rightarrow\; du=f'(x)dx$, $dv=g(x)dx \;\Rightarrow\; v=\int\limits_a^x g(x)\,dx = G(x)dx$ luego

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x)\int_a^x g(x)\,dx\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

(b) Consideremos $\int_a^b f'(x)G(x)\,dx$ Como $f'$ no cambia de signo y $f,g$ son continuas entonces aplicando el teorema del valor medio generalizado para integrales se obtiene

$$\exists\ \xi\in[a,b] \text{ tal que } \int_a^b f'(x)G(x)\,dx = G(\xi)\int_a^b f'(x)\,dx = G(\xi)(f(b)-f(a))$$

(c) utilizando las partes anteriores se obtiene

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)\int_a^b g(x)\,dx - G(\xi)(f(b)-f(a))$$

Notando que $\int\limits_a^b g(x)\,dx = \int\limits_a^\xi g(x)\,dx + \int\limits_\xi^b g(x)\,dx$ se tiene el resultado pedido

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)g(x)dx &= f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx - G(\xi)(f(b)-f(a)) \\
&= f(b)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx - (f(b)-f(a))\int_a^\xi g(x)\,dx \\
&= f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx
\end{aligned}$$

2. Sea $y = \pi - x$ luego $-dy = dx$, ademas si $x = 0 \Rightarrow y = \pi$ y $x = \pi \Rightarrow y = 0$

$$\begin{aligned}
I = \int_0^\pi x\Phi(\operatorname{sen}(x))dx &= -\int_\pi^0 (\pi - y)\Phi(\operatorname{sen}(\pi - y))dy \\
&= \pi\int_0^\pi \Phi(\operatorname{sen}(x))dx - \int_0^\pi y\Phi(\operatorname{sen}(y))dy \\
&= \pi\int_0^\pi \Phi(\operatorname{sen}(x))dx - I
\end{aligned}$$

luego

$$2I = \pi\int_0^\pi \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi$$

Calculemos

$$I = \int_0^\pi x\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx$$

Consideremos $\Phi(t) = \frac{t}{2-t^2}$ Claramente $\Phi(\operatorname{sen}(x)) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$ luego ocupando lo anterior

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx &= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \Phi(\operatorname{sen}(x))dx \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}dx
\end{aligned}$$

Consideremos ahora el cambio de variables $u = \cos x\,dx$, $-du = \operatorname{sen} x\,dx$ ademas si $x = \pi \Rightarrow u = -1$ y $x = 0 \Rightarrow u = 1$

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}du \\
&= \frac{\pi}{2}(\arctan u)\Big|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

P9. Analice la función $g(x) = \int\limits_0^x (t-1)e^{-t^2} dt$ $x \geq 0$ nota: $\lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Sol: Sea $f(t) = (t-1)e^{-t^2}$

- Dominio: $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ pues $f$ es continua (luego integrable) en $[0, x]$
- Asíntotas:
  * Verticales: $g$ no posee asíntotas verticales.
  * Horizontales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} \int_0^x (t-1)e^{-t^2}\, dt \\
&= \lim_{x\to\infty} \int_0^x te^{-t^2}\, dt - \int_0^x e^{-t^2} dt \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} - \frac{e^{-x^2}}{2} - \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt \\
&= \frac{1-\sqrt{\pi}}{2} < 0
\end{aligned}$$

- Ceros: $g(x) = 0$ en $x = 0$
- Crecimiento: Cálculo de $g'(x)$
  Utilizando el T.F.C

$$g'(x) = (x-1)e^{-x^2}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) &> 0 \quad x \in (1, \infty) \\
g'(x) &= 0 \quad \text{en } x = 1 \\
g'(x) &< 0 \quad x \in (0, 1)
\end{aligned}$$

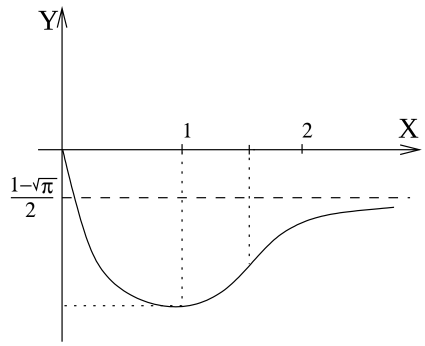
- Concavidad y puntos de inflexión:Cálculo de $g''(x)$

$$g''(x) = e^{-x^2}\big(1 - 2x(x-1)\big) = e^{-x^2}(1 + 2x - 2x^2)$$

$$\begin{aligned}
g''(x) &> 0 \quad x \in (0, \frac{1+\sqrt{3}}{2}) \\
g''(x) &= 0 \quad \text{en } x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\
g''(x) &< 0 \quad x \in (\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \infty)
\end{aligned}$$

– Gráfico:

| | 0 | $(0,1)$ | 1 | $(1,\frac{1+\sqrt{3}}{2})$ | $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ | $(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | 0 | $-$ | $\int_0^1 (t-1)e^{-t^2}\,dt$ | $-$ | | $-$ |
| $g'(x)$ | | $\overset{<0}{\searrow}$ | $\overset{0}{\text{min}}$ | $\overset{>0}{\nearrow}$ | | $\overset{>0}{\nearrow}$ |
| $g''(x)$ | | $\overset{>0}{\text{Convexa}}$ | | $\overset{>0}{\text{Convexa}}$ | $\overset{0}{\text{Infl.}}$ | $\overset{<0}{\text{Concava}}$ |




– Recorrido: $\text{Rec}(g(x)) = [0, \int_0^1 (t-1)e^{-t^2}dt]$

P10. 1. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}dt$

2. Sea $G\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por $G(y) = \int_1^2 \frac{\text{sen}(ty)}{t}dt$. Calcule $G'(y)$

Ind: considere el cambio de variables $u = t\cdot y$

Sol:

1. Notemos que este límite es de la forma $\frac{0}{0}$ luego podemos aplicar la regla de *L'Hopital*, para derivar la integral utilizamos el Teorema Fundamental del Cálculo (T.F.C.)

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2}dt &\overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 0} -\frac{\int_0^x e^{t^2}dt + xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\
&\overset{\text{L'hop}}{=} -\frac{2e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

2. Sea $u = ty$ luego $du = ydt$ ademas $t=1 \Rightarrow u = y$ y $t = 2 \Rightarrow u = 2y$ se tiene que

$$G(y) = \int_y^{2y} \frac{\text{sen}\, u}{u}du$$

Ahora derivando y aplicando el teorema fundamental del cálculo

$$G'(y) = \frac{\operatorname{sen} 2y - \operatorname{sen} y}{y}$$

## 4 Problemas Propuestos

- Defina la función $F(x)$ para $x \in P = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt$.

  1. Demuestre que $F$ está bien definida, que es derivable en $P$ y que su derivada es $\frac{1}{x}$.
  2. Muestre que $\forall x, y > 0, \quad F(xy) = F(x) + F(y)$. (Compruebe que la función $H(xy) = F(xy)$ es primitiva de $\frac{1}{t}$ y utilice el Teo. Fundamental del Cálculo).
  3. Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ se tiene que: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq F(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$

- Sea $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ una función biyectiva y derivable en $[0, \infty[$. Muestre que

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt$$

  satisface que $g'(x) = f(x) + f'(x)x$. Concluya que $g(x) = xf(x)$.

- Sea $f : [1, +\infty] \to \mathbb{R}$ una función no negativa y decreciente. Se definen las sucesiones:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad T_n = \int_1^n f(t)dt \qquad \Delta_n = S_n - T_n$$

  1. Pruebe que $0 \leq f(n+1) \leq \Delta_{n+1} \leq \Delta_n \leq f(1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Deduzca que $\Delta_n$ converge.
  2. Demuestre usando 1. que la sucesión:

$$u_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} - \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln 2}\right)$$

     converge.

- 1. Dado un rectángulo de base $a$ y altura $b$, se incribe un arco de parábola pasando por los vértices superiores del rectangulo y el punto medio de la base opuesta. Se pide demostrar que el área encerrada por la parábola y la base superior del rectángulo dividido por el área del rectángulo es constante.
  2. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{4i}{n} + \frac{i^2}{n^2} - 2(2 + \frac{i}{n})\right] \frac{1}{n}$$

  3. Consideremos la función $f$ integrable en un intervalo $[a, b]$ y una función $g$ continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b)$. Dada la partición uniforme $\{x_i\}_{i=0}^n$ del intervalo $[a, b]$ se pide demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot (g(x_{i+1}) - g(x_i)) = \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

- Demuestre que existe $c \in (0, 1)$ tal que

$$\int_0^1 \frac{1 + x^{30}}{1 + x^{60}} dx = 1 + \frac{c}{31}$$