Auxiliar #8 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 Primitivas

Cambio de notación:

$$\int f := \int f(x)dx$$

Donde x es la variable con respecto a la cual estamos integrando.

1.1 Fórmula del cambio de variables

Sea $u = g(x)$ entonces

$$\int f(u)du = \int (f \circ g)(x)g'(x)dx$$

Ejemplo: Calcular $I = \int t\,\mathrm{sen}(t^2)dt$.
Sol: Sea $u = t^2$ por lo tanto $\frac{du}{2} = dt$, luego

$$I = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}(u)du = -\frac{\cos u}{2} = -\frac{\cos(t^2)}{2} + C$$

1.2 Fórmula de integración por partes

$(udv\ uv\ vdu)$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Ejemplo: Calcular

- $I = \int \ln x\, dx$
  Sol: Sea $u = \ln x$ luego $du = \frac{1}{x}dx$, $dv = dx$ luego $v = x$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x(\ln(x) - 1) + C$$

- $I = \int \left(\frac{e^t}{t^2} - \frac{e^t}{t}\right) dt$

1.3 Sustituciones Recomendadas

1.3.1 trigonométricas

Para expresiones como las que se indican se recomiendan las siguientes sustituciones:

$$a^2 + x^2 \quad : \quad x = a\tan(\varphi) \;\text{ o bien }\; x = a\,\mathrm{senh}(t) \tag{1}$$

$$a^2 - x^2 \quad : \quad x = a\cos(\varphi) \;\text{ o bien }\; x = a\,\mathrm{sen}(\varphi) \tag{2}$$

$$x^2 - a^2 \quad : \quad x = a\sec(\varphi) \;\text{ o bien }\; x = a\cosh(t) \tag{3}$$

Ejemplo: Calcular

- $I = \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ hacer $x = a\,\mathrm{sen}\,t \;\Rightarrow\; dx = a\cos t\,dt$
- $I = \int \frac{1}{x\sqrt{a^2+x^2}}dx$ hacer $x = a\tan t$

1.3.2 Racionales

Para expreciones como las que se indican se recomiendan las siguientes cambios de variables para transformarlos en funciones racionales:

$$\sqrt[n]{ax+b} \quad : \quad ax + b = z^n \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{x^2+px+q} \quad : \quad x^2 + px + q = (z-x)^2 \tag{5}$$

$$\sqrt[n]{q+px-x^2} = \sqrt[n]{(\alpha+x)(\beta-x)} \quad : \quad q + px - x^2 = (\alpha+x)^2z^2 \text{o bien } q + px - x^2 = (\beta-x)^2z^2 \tag{6}$$

1.3.3 Método de Fracciones Parciales

La idea es separar los términos de la forma $\frac{P(x)}{(ax^2+bx+c)^m(x-\alpha)^n}$ en términos de "facil" integración ($P(x)$ es un polinomio de grado menor que el grado del denominador).

Cuando en el denominador hay términos de la forma $(ax^2+bx+c)^m$ entonces ponemos

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^m} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{m-1}} + \cdots + \frac{Ex+F}{(ax^2+bx+c)}$$

y si hay términos de la forma $(x-\alpha)^n$ entonces ponemos

$$\frac{A'}{(x-\alpha)^n} + \frac{B'}{(x-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{C'}{(x-\alpha)}$$

Por ejemplo: Calcular $\int \frac{2x-5}{(x^2+1)(x-2)^2}$

$$\frac{2x-5}{(x^2+1)(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)}$$

igualando coeficientes se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + D &= 0 \\ B - 4A + C - 2D &= 0 \\ 4A - 4B + D &= 2 \\ 4B + C - 2D &= -5 \end{aligned}$$

este entrega los valores de A, B, C, D

Fuente: *Teoría y Problemas de Cálculo Diferencial e Integral.*
Serie de compendios **SCHAUM**.
páginas 129 a 170

2 Problemas

P1. Calcular las siguientes primitivas

1. $\int \frac{\cot x}{\ln(\operatorname{sen} x)} dx$
2. $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} dx$
3. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

P2. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ satisface la recurrencia:

$$(1+2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$$

P3. Sea $I_n = \frac{\cos(nx)}{(\cos x)^n}$

1. Calcular $I_1,\ I_2$
2. Calcular $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}} dx$
3. Encontrar una relación de recurrencia para I_{n+1} en función de I_n

P4. 1. Calcule la primitiva

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+(\sqrt{1+x^2})^3}} dx$$

2. (a) Para $J_n = \int \frac{x^n}{1+x^2} dx$ demuestre que $J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{x^n}{n}$.

   (b) usando (a) deducir una relación de recurrencia para $I_n = \int x^n \arctan(x) dx$.

3 Soluciones

P1. Calcular las siguientes primitivas

1. $I = \int \frac{\cot x}{\ln(\operatorname{sen} x)} dx$ Haciendo $u = \ln(\operatorname{sen} x) \;\Rightarrow\; du = \cot x\, dx$ con esto

$$I = \int \frac{1}{u} du = \ln u + C$$

retornando a las variables originales se obtiene

$$\int \frac{\cot x}{\ln(\operatorname{sen} x)} dx = \ln(\ln(\operatorname{sen} x))$$

2. $I = \int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} dx$ Haciendo $u = \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; du = \cos x\, dx$ con esto

$$I = \int \frac{u}{\sqrt{1+u}} du$$

ahora notando que

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{1+u}} &= \frac{u+1}{\sqrt{1+u}} - \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\ &= \sqrt{1+u} - \frac{1}{\sqrt{1+u}} \end{aligned}$$

luego

$$I = \int \sqrt{1+u} - \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} = \frac{2}{3}(1+u)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{1+u} + C$$

retornando a la variable original

$$\frac{2}{3}(1+\operatorname{sen} x)^{\frac{3}{2}} + 2\sqrt{1+\operatorname{sen} x} + C$$

3. $I = \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$ Haciendo $u^2 = x \;\Rightarrow\; 2udu = dx$ con esto

$$I = \int \frac{u^2}{\sqrt{1+u}} du$$

ahora notando que

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{\sqrt{1+u}} &= \frac{u^2-1}{\sqrt{1+u}} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\ &= \frac{(u+1)(u-1)}{\sqrt{1+u}} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\ &= \sqrt{1+u}(u-1) + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \\ &= u\sqrt{1+u} - \sqrt{1+u} + \frac{1}{\sqrt{1+u}} \end{aligned}$$

integrando cada término por separado se obtiene el resultado

P2. Demuestre que $I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}$ satisface la recurrencia:

$$(1+2n)I_n = (2x^n\sqrt{1+x}) - 2nI_{n-1}$$

Sol: Integrando por I_n partes $u = x^n \;\Rightarrow\; du = nx^{n-1}dx$ y $dv = \frac{1}{\sqrt{1+x}} \;\Rightarrow\; v = 2\sqrt{1+x}$ luego

$$I_n = 2x^n\sqrt{1+x} - 2n\int x^{n-1}\sqrt{1+x}dx$$

pero

$$\int x^{n-1}\sqrt{1+x}dx = \int x^{n-1}\frac{(1+x)\sqrt{1+x}}{(1+x)}dx$$

reemplazando

$$\begin{aligned} I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2n\int \frac{x^{n-1}+x^n}{\sqrt{1+x}} \\ I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2n(I_{n-1}+I_n) \\ \therefore (2n+1)I_n &= 2x^n\sqrt{1+x} - 2nI_{n-1} \end{aligned}$$

P3. Sea $I_n = \int \frac{\cos(nx)}{(\cos x)^n}$

1. Calcular $I_1,\ I_2$
2. Calcular $\int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}}dx$
3. Encontrar una relación de recurrencia para I_{n+1} en función de I_n

Sol:

1. $I_1 = \int dx = x + C$, $I_2 = \int \frac{\cos(2x)}{(\cos x)^2}$ ademas $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ luego

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{(\cos x)^2} \\ &= \int 1 - \tan^2 x\, dx \\ &= x - \int \tan^2 x\, dx \end{aligned}$$

para $\int \tan^2 x\, dx$ tomamos $u = \tan x \;\Rightarrow\; du = \sec^2 x\, dx = (1+u^2)dx$

$$I_2 = x - \int \frac{u^2}{1+u^2}dx = 2x - \tan x + C$$

2. $I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}}dx$ sea $u = \cos x \;\Rightarrow\; -du = \operatorname{sen} x dx$

$$I = -\int \frac{1}{(u)^{n+1}}dx = \frac{1}{nu^n} + C$$

retornando a la variable original

$$I = \frac{1}{n(\cos x)^n} + C$$

3. $I_{n+1} = \int \frac{\cos((n+1)x)}{(\cos x)^{n+1}}$ pero $\cos((n+1)x) = \cos nx \cos x - \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} x$

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int \frac{\cos nx \cos x - \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}} \\
&= \int \frac{\cos nx \cos x}{(\cos x)^n \cos x} dx - \int \frac{\operatorname{sen} nx \operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}} dx \\
&= I_n - \underbrace{\int \operatorname{sen} nx \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}} dx}_{J}
\end{aligned}$$

J: por partes $u = \operatorname{sen} nx \;\Rightarrow\; du = n \cos nx\, dx$, $dv = \frac{\operatorname{sen} x}{(\cos x)^{n+1}} dx \;\Rightarrow\; v = \frac{1}{n(\cos x)^n} dx$ luego

$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= I_n - J \\
&= I_n - \left(\frac{\operatorname{sen} nx}{n(\cos x)^n} - \int \frac{\cos nx}{(\cos x)^n} dx \right) \\
&= 2I_n - \frac{\operatorname{sen} nx}{n(\cos x)^n}
\end{aligned}$$

P4. 1. Calcule la primitiva

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + (\sqrt{1+x^2})^3}} dx$$

2. (a) Para $J_n = \int \frac{x^n}{1+x^2} dx$ demuestre que $J_{n+1} + J_{n-1} = \frac{x^n}{n}$.

(b) usando (a) deducir una relación de recurrencia para $I_n = \int x^n \arctan(x) dx$.

Sol:

1. Realicemos el cambio de variable $u^2 = 1+x^2$ con esto $2udu = 2xdx$ reemplazando se obtiene:

$$I = \int \frac{u}{\sqrt{u^2 + u^3}} du = \int \frac{1}{\sqrt{1+u}} du$$

ahora haciendo $s = 1 + u$ se tiene que $ds = du$:

$$I = \int s^{-\frac{1}{2}} ds = 2s^{\frac{1}{2}}$$

retornando a las variables originales:

$$I = 2(1+u)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

2. (a)

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \int \frac{x^{n+1}}{1+x^2} + \frac{x^{n-1}}{1+x^2} dx$$

factorizando por x^{n-1}:

$$J_{n+1} + J_{n-1} = \int x^{n-1} dx = \frac{x^n}{n}$$

(b) Integrando por partes, tomando $u = \arctan(x)$ y $v = x^n$:

$$I_n = x^n \arctan x - \frac{1}{n+1}\int \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx$$

analogamente se tiene para I_{n-2}:

$$I_{n-2} = x^{n-2} \arctan x - \frac{1}{n-1}\int \frac{x^{n-1}}{1+x^2}dx$$

con esto:

$$nI_n + (n-1)I_{n-2} = (x^2+1)x^{n-2} \arctan x - (J_{n+1} + J_{n-1})$$

utilizando la parte (a) se concluye.

4 Problemas Propuestos

- Si $f(n) = \int\limits_{0}^{\pi/4} (\tan x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$ Demuestre que
  1. $f(n+1) < f(n)$
  2. $f(n) + f(n-2) = \frac{1}{n-1} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$
  3. $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1} \quad \forall\ n \geq 2$

- 1. Sea $A = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{(2+x)^2} dx$. Calcule
  $$\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x}{1+x} dx$$
  en función de A.
  2. Calcule
  $$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- Calcular las siguientes primitivas:
  1. $\int \ln(1+x^2)$
  2. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$
  3. $\int \left(\frac{e^t}{t^2} - \frac{e^t}{t} \right) dt$
  4. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$