Auxiliar #6 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 Resumen

1.1 Desarrollo de Taylor

Este consiste simplemente en "aproximar" una función f (derivable hasta el orden $n+1$) por un polinomio.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + Error$$

Donde $Error$:

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-\xi)^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (Cauchy)$$

o bien

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad (Lagrange)$$

con ξ entre x_0 y x

Ejemplo: Desarrollo de Taylor para e^x, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$ en torno a $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \cdots \\ \operatorname{sen}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \cdots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \cdots \end{aligned}$$

1.2 Convexidad

Definición: Sea I un intervalo en $\mathbb{R}$, la función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es convexa en I ssi $\forall x_1, x_2 \in I$ y $\forall \lambda \in [0,1]$ se verifica que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Ejemplo: $y = |x|$ es convexa

Teorema: Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en I entonces f es convexa ssi $\forall\ x \in I \quad f''(x) > 0$

1.3 Estudio de funciones

En general se pide:

1. Determinación del dominio. Simetrías.
2. Determinación de asíntotas y ramas parabólicas.
3. Puntos de corte con los ejes y signo de $f(x)$.
4. Bosquejo de la curva.
5. Primera derivada. Crecimiento y valores extremos.
6. Segunda derivada. Concavidad y puntos de inflexión.
7. Tangentes a la curva en puntos especiales.
8. Cálculo de puntos adicionales para dibujar el gráfico.
9. Dibujo de la curva. Recorrido.

2 Problemas

P1. Determinar el intervalo de números reales donde se puede calcular $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ con 4 cifras significativas.

P2. Sea $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

1. Escriba los 4 primeros términos del desarrollo de Maclaurin de $f(x)$
2. Demuestre que $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{3}$ si $x \geq 0$

P3. Suponga que $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que $f^{(n)}(x)$ es una función continua, con $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Sea $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$ con $f''(x) \neq 0$ salvo para x_0. Se pide

1. Definir $g(x)$ de modo que sea continua en x_0
2. Calcular, de la definición de derivada, $g'(x_0)$
   Ind: Sea $h = x - x_0$ y expanda en serie de Taylor f' y f'' en torno a x_0. Luego haga $h \to 0$

P4. Determinar el intervalo de números reales para los que la fórmula

$$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}$$

de un resultado con 3 cifras significativas.

P5. Hacer el estudio analítico de

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

P6. Hacer el estudio analítico del gráfico de la función

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

P7. Sea f una función tal que $f'(x) = -xf(x)$ con $f(0) > 0$. Sea g una función tal que $g'(x) = xg(x)$ con $g(0) > 0$.

1. Probar que $f \cdot g$ es constante y ademas que $f(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R}$
2. Trazar el gráfico de f y g

P8. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x-1} & x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

1. Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}_+^*$.
2. Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcule f'.
3. Determine los puntos de continuidad de f' en $(0, \infty)$.
4. Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$.
5. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 para f en torno a 1.

3 Soluciones

P1. Determinar el intervalo de números reales donde se puede calcular $\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!}$ con 4 cifras significativas.
Sol:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + R_4(x)$$

pero

$$|R_4(x)| = |\frac{x^5}{5!}\cos\xi| \leq \frac{|x|^5}{5!}$$

como queremos 4 cifras significativas entonces

$$|R_4(x)| \leq \frac{|x|^5}{5!} \leq 10^{-4}$$

por lo tanto $|x| \leq \frac{\sqrt[5]{5!\cdot 10}}{10} = 0.41$.
Notemos que estamos trabajando en radianes en consecuencia transformando a grados se tiene que

$$|x| \leq 23,5^\circ$$

P2. Sea $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

1. Escriba los 4 primeros términos del desarrollo de Maclaurin de $f(x)$
2. Demuestre que $1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \leq f(x) \leq 1 + \frac{x}{3}$ si $x \geq 0$

Sol: El desarrollo de Maclaurin es el desarrollo de Taylor pero en torno a $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}
f(0) &= 1 \\
f'(x) &= \frac{(1+x)^{-2/3}}{3} \quad \text{luego } f'(0) = \frac{1}{3} \\
f''(x) &= -\frac{2(1+x)^{-5/3}}{9} \quad \text{luego } f''(0) = -\frac{2}{9} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{10(1+x)^{-8/3}}{27} \quad \text{luego } f'(0) = \frac{10}{27}
\end{aligned}$$

1. El desarrollo de Maclaurin $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + f^{(3)}\frac{x^3}{3!} + \cdots$
   Reemplazando
   $$f(x) \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81}$$
2. Utilizando las fórmulas del resto
   $$f(x) = 1 + R_0 = 1 + \frac{x}{3(1+\xi)^{2/3}}$$
   como $0 \leq \xi \leq x$ se tiene
   $$f(x) \leq 1 + \frac{x}{3}$$

Tambien

$$f(x) = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9(1+\xi)^{5/3}}$$

nuevamente como $0 \leq \xi \leq x$ haciendo $\xi = 0$ se tiene

$$f(x) \geq 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}$$

P3. Suponga que $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y que $f^{(n)}(x)$ es una función continua, con $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Sea $g(x) = x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$ con $f''(x) \neq 0$ salvo para x_0. Se pide

1. Definir $g(x)$ de modo que sea continua en x_0
2. calcular, de la definición de derivada, $g'(x_0)$
   Ind: Sea $h = x - x_0$ y expanda en serie de Taylor f' y f'' en torno a x_0. Luego haga $h \to 0$.

Sol: El desarrollo de Taylor de f' y f''

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \cdots}_{0} + \frac{f^{(n)}(\xi_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} \\ f''(x) &= \underbrace{f''(x_0) + f'''(x_0)(x-x_0) + \cdots}_{0} + \frac{f^{(n)}(\xi_1)(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} \end{aligned}$$

luego

$$\frac{f'(x)}{f''(x)} = \frac{f^{(n)}(\xi_0)(x-x_0)^{n-1}(n-2)!}{f^{(n)}(\xi_1)(x-x_0)^{n-2}(n-1)!} = \frac{f^{(n)}(\xi_0)(x-x_0)}{f^{(n)}(\xi_1)(n-1)}$$

con ξ_0, ξ_1 entre x y x_0

1. Continuidad

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x - \frac{f^{(n)}(\xi_0)(x-x_0)}{f^{(n)}(\xi_1)(n-1)} = x_0$$

   Luego g es continua si

$$g(x) = \begin{cases} x - \frac{f'(x)}{f''(x)} & x \neq x_0 \\ x_0 & x = x_0 \end{cases}$$

2. Calculemos $g'(x_0)$ por definición

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{x - \frac{f^{(n)}(\xi_0)(x-x_0)}{f^{(n)}(\xi_1)(n-1)} - x_0}{x - x_0} \end{aligned}$$

   ahora definiendo $h = x - x_0$ y tomando límite $h \to 0$

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{h - \frac{f^{(n)}(\xi_0)h}{f^{(n)}(\xi_1)(n-1)}}{h} \\ \text{Notemos que si } h \to 0 &\Rightarrow \xi_0 \to x_0 \text{ y } \xi_1 \to x_0 \\ \text{luego } g'(x_0) &= 1 - \frac{1}{n-1} = \frac{n-2}{n-1} \end{aligned}$$

P4. Determinar el intervalo de números reales para los que la fórmula

$$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25}$$

de un resultado con 3 cifras significativas.

Sol: $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1+x)^{-4/5}}{5} \\ f''(x) &= -\frac{4(1+x)^{-9/5}}{25} \\ f''(x) &= \frac{36(1+x)^{-14/5}}{125} \end{aligned}$$

Escribamos el desarrollo de Maclaurin de $f(x)$

$$f(x) = 1 + \frac{x}{5} - \frac{2x^2}{25} + \frac{36(1+\xi)^{-14/5}x^3}{125} \qquad \text{con } \xi \in (0,x)$$

queremos 3 cifras significativas luego el error debe ser menor que 10^{-3}

$$\left| \frac{36(1+\xi)^{-14/5}x^3}{125} \right| \leq \left| \frac{36x^3}{125} \right| \leq 10^{-3}$$

despejando se obtiene que

$$|x^3| \leq \frac{5^3}{36 \cdot 10^3} \Rightarrow |x| \leq \frac{2}{5\sqrt[3]{36}}$$

P5. Hacer el estudio analítico de

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Sol:

- Dominio: $f(x)$ está bien definida $\forall\ x$ salvo para $x=0$ luego $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$
- Ceros: no tiene
- Límites importantes

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\mathrm{L'hop}}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \to \infty \\ \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} &= 0 \end{aligned}$$

- Asintotas verticales horizontales y oblicuas
  - Verticales: en $x=0$ donde $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$
  - Horizontales: no tiene

* Oblicuas:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1 \\ n &= \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{1/x} - 1) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1 \end{aligned}$$

Asíntota oblicua de ecuación $y = x + 1$

– Crecimiento: Cálculo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}(x-1)}{x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \text{ en } x = 1 \\ f'(x) &\geq 0 \text{ ssi } x \geq 1 \vee x \leq 0 \\ f'(x) &< 0 \text{ ssi } 0 < x < 1 \end{aligned}$$

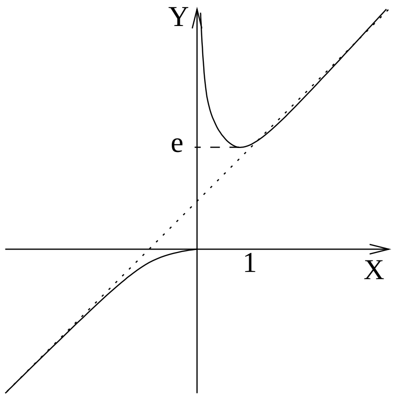
– Concavidad e inflexiones: Cálculo de $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &> 0 \text{ si } x > 0 \text{ convexa} \\ f''(x) &< 0 \text{ si } x < 0 \text{ concava} \end{aligned}$$

– Gráfico:

	$(-\infty, 0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$		$\nexists$		e	
$f'(x)$	$\overset{>0}{\nearrow}$	$\nexists$	$\overset{<0}{\searrow}$	$\overset{0}{\text{min}}$	$\overset{>0}{\nearrow}$
$f''(x)$	$\overset{<0}{\text{Concava}}$	$\nexists$	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$		$\overset{>0}{\text{Convexa}}$



– Recorrido:

$$\text{Rec}(f) = (-\infty, 0) \cup (e, \infty)$$

P6. Hacer el estudio analítico del gráfico de la función

$$y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$$

Sol:

– Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \backslash \{1\}$
f es continua en su dominio y no es reparable en $x = 1$ pues $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \infty$

– Ceros: $f(x) = 0$ en $x = -1$

– Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas:

  * Verticales: f posee una asíntota vertical en $x = 1$
  * Horizontales: no tiene
  * Oblicuas:

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1 \\ n &= \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1} = 5 \end{aligned}$$

Asíntota oblicua de ecuación $y = x + 5$

– Crecimiento: Cálculo de $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \text{ en } x = 1 \;\vee\; x = 5 \\ f'(x) &\geq 0 \text{ ssi } x \in (-\infty, 1) \cup [5, \infty) \\ f'(x) &< 0 \text{ ssi } x \in (1, 5) \end{aligned}$$

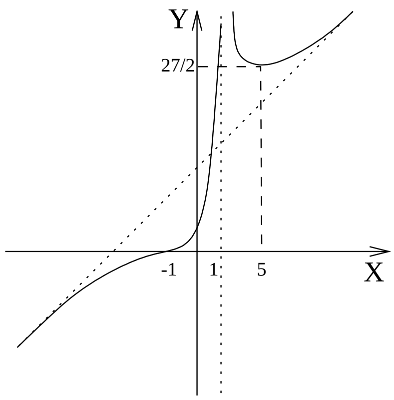
– Concavidad e inflexiones: Cálculo de $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \text{ si } x = -1 \text{ punto de inflexión} \\ f''(x) &\geq 0 \text{ si } x \in (-1,1) \cup (1,\infty) \text{ convexa} \\ f''(x) &< 0 \text{ si } x < -1 \text{ concava} \end{aligned}$$

– Gráfico

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,\infty)$
$f(x)$		0		$\nexists$		$\frac{27}{2}$	
$f'(x)$	$\overset{>0}{\nearrow}$	0	$\overset{>0}{\nearrow}$	$\nexists$	$\overset{<0}{\searrow}$	0	$\overset{<0}{\nearrow}$
$f''(x)$	$\overset{<0}{\text{Concava}}$	0	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$	$\nexists$	$\overset{>0}{\text{Convexa}}$		$\overset{>0}{\text{Convexa}}$



– Recorrido: $\mathbb{R}$

P7. Sea f una función tal que $f'(x) = -xf(x)$ con $f(0) > 0$. Sea g una función tal que $g'(x) = xg(x)$ con $g(0) > 0$.

1. Probar que $f \cdot g$ es constante y ademas que $f(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, $g(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$
2. Trazar el gráfico de f y g

Sol:

1. Sea $h(x) = f(x)g(x)$, (h es derivable pues f y g lo son)

$$\begin{aligned} h' &= (f \cdot g)' = f'g + g'f \\ h'(x) &= -xf(x)g(x) + xg(x)f(x) = 0 \end{aligned}$$

como $h'(x) = 0 \ \forall x$ entonces h es constante
$h(x) = Cte = f(0)g(0) > 0$ luego $f(x)g(x) > 0 \forall x$

demostremos que $f(x) > 0$ y $g(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$ supongamos que esto no sucede, luego existe $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) < 0$ como f es continua (pues es derivable) aplicando el $TVI.$ se obtiene que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$ lo cual es contradictorio pues $f(x)g(x) > 0 \ \forall \ x$
La demostración es análoga para demostrar que $g(x) > 0 \forall \ x$

2. Sabemos que $f > 0$, ademas $f'(x) = -xf(x)$ luego

$$f''(x) = f(x)(x^2 - 1)$$

Notemos ademas que $f''(x) = 0$ en $x = \pm 1$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$f(x)$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$+$	0	-		-
$f''(x)$	$+$	0	-		-	0	$+$

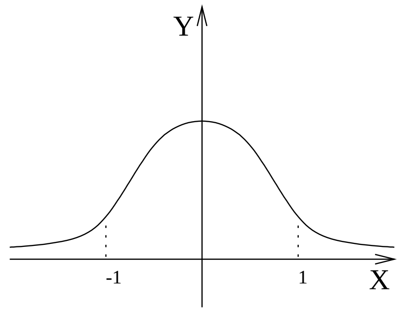


Figura 1: Gráfico de f

El gráfico de g queda propuesto
Sol:

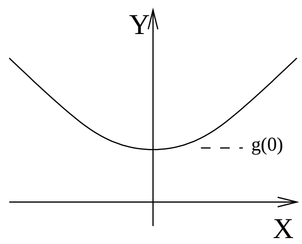


Figura 2: Gráfico de g

P8. Considere

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln(x)}{x-1} & x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$$

1. Determine el valor de α para que f sea continua en $\mathbb{R}^*_+$.

2. Analice la existencia de $f'(x)$ para $x > 0$. En caso de existir, calcule f'.
3. Determine los puntos de continuidad de f' en $(0, \infty)$.
4. Asuma que $f^{(n)}$ existe para $n \geq 2$ y que es continua en 1. calcule una recurrencia para $f^{(n)}(1)$, utilizando la fórmula de Leibnitz para $(x-1)f(x)$.
5. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 para f en torno a 1.

Sol :

1. Necesitamos calcular $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ aplicando L'hopital se tiene:

$$\lim_{x\to 1} f(x) \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1}{1} = 1$$

   Luego $\alpha = 1$.

2. – si $x \neq 1$, f es suma, multiplicación y composición de funciones derivables luego f es derivable y:

$$f'(x) = \frac{(x\ln x)'(x-1) - x\ln x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)^2}$$

   – si $x = 1$, calculemos $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ si este límite existe f será derivable en $x = 1$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2}$$

   aplicando L'hopital

$$\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{2(x-1)}$$

   notemos que $\ln x$ y $x - 1 \to 0$ si $x \to 1$, aplicamos nuevamente L'hopital a la ecuación anterior:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{2(x-1)} \overset{\text{L'hop}}{=} \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

   luego $f'(1) = \frac{1}{2}$

3.
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} & x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$$

   – si $x \neq 1$, $f'(x)$ es continua por suma, multiplicación y composición de funciones continuas.

   – si $x = 1$ calculemos el $\lim\limits_{x\to 1} f'(x)$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - 1 - \ln x}{(x-1)^2} \overset{\text{L'hop}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

   se tiene que:

$$\lim_{x\to 1} f'(x) = f'(1)$$

   luego f' es continua.

4. la formula de leibnitz:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x)$$

donde $g(x) = (x-1)$, notemos que para $k > 1$ resulta que $g^{(k)} = 0$, entonces:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) \cdot (x-1) + n f^{(n-1)}(x)$$

por otra parte $(f \cdot g)(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(1)}(x) &= \ln x + 1 \\
(f \cdot g)^{(2)}(x) &= \frac{1}{x} \\
(f \cdot g)^{(3)}(x) &= \frac{-1}{x^2} \\
(f \cdot g)^{(4)}(x) &= \frac{2}{x^3} \\
&\vdots \\
(f \cdot g)^{(n)}(x) &= (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \qquad n \geq 2
\end{aligned}$$

igualando las ecuaciones anteriores y tomando $x = 1$:

$$n f^{(n-1)}(1) = (-1)^n (n-2)! \Rightarrow f^{(n-1)}(1) = (-1)^n \frac{(n-2)!}{n}$$

5. El polinomio de Taylor de orden 3 de f en torno a x_0 estará dado por:

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2} + \frac{f'''(x_0)(x-x_0)^3}{3!}$$

tomando $x_0 = 1$ y utilizando las partes anteriores se obtiene:

$$T(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{6}$$

4 Problemas Propuestos [1]

- Utilice un desarrollo de Taylor de orden dos para aproximar $\sqrt{3}$, con al menos dos decimales significativos.

- Escriba la serie de Maclaurin de la función $f(x) = xe^x$

- Sea $f(x) = \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ donde $a > 0$ y $|x| < a$

  1. Calcular $f^{(n)}(x)$ y luego $f^{(n)}(0)$ para los casos n par y n impar.
  2. Escriba el polinomio de Maclaurin de f con resto de orden n
  3. Utilice los 3 primeros términos distintos de cero de dicho polinomio para calcular aproximadamente $\ln 3$ (Ind: tome $a = 1$)

- Analice las siguientes funciones.

  1. $f(x) = \frac{x}{\ln^2(x)}$
  2. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}(1 - \frac{1}{x})$
  3. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$
  4. $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x}e^{\frac{1}{x}}$

- Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  1. Estudie f completamente indicando ceros, asíntotas, puntos de corte con los ejes... etc.
  2. Usando inducción demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, para todo $x \neq 0$,

$$f^{(k)} = e^{-\frac{1}{x^2}} p_k\left(\frac{1}{x}\right)$$

     donde las funciones p_k satisfacen la recurrencia

$$p_{k+1}(s) = 2s^3 p_k(s) - s^2 p_k'(s),$$

     con $p_0(s) \equiv 1$.
  3. Probar que las funciones p_k son polinomios de grado $3k$.
  4. Usando inducción demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = 0$.

[1] Sacar guía de la dirección www.dim.uchile.cl/