Auxiliar #5 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 Resumen

1.1 Máximos y mínimos

Si x_0 es máximo o mínimo local entonces $f'(x_0)$ no existe o bien $f'(x_0) = 0$.

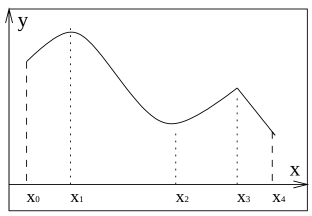
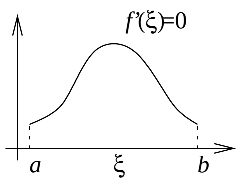


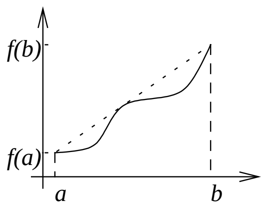
Figura 1: x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 son puntos críticos

1.2 Teorema del valor medio

Teorema 1.1 (Teorema de Rolle) *Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y diferenciable en (a,b). Si $f(a) = f(b)$ entonces $\exists \xi \in (a,b)$ tal que $f'(\xi) = 0$*



Teorema 1.2 (Teorema del valor medio de Lagrange) *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *continua en* $[a,b]$ *y diferenciable en* (a,b), *entonces* $\exists \xi \in (a,b)$ *tq* $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Ejemplo: Demuestre usando TVM. que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

Sol:
Consideremos $f(x) = \ln(1+x)$, por TVM. $\exists \xi \in (0,x)$ tq $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, en nuestro caso $f'(\xi) = \frac{1}{1+\xi}$ pero:

$$\frac{1}{1+\xi} \leq 1 \quad \text{pues } \xi > 0$$

ademas

$$\frac{1}{1+\xi} \geq \frac{1}{1+x} \quad \text{pues } \xi < x$$

luego

$$\frac{1}{1+x} \leq \frac{\ln(1+x)}{x} \leq 1$$

y como $x > 0$ se tiene el resultado (nota: el caso $x = 0$ es directo).

Teorema 1.3 (Teorema del valor medio generalizado "TVMG") *Sean* $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, *continuas en* $[a,b]$ *y diferenciables en* (a,b), *entonces*

$$\exists \xi \in (a,b) \ \textit{tal que} \ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Ejemplo: Demostrar usando el teorema del valor medio generalizado que $\forall x \in (0,1)$

$$1 < \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sol:
Sea $f(x) = \arctan x$ y $g(x) = \arccos x$, estas funciones son continuas en $[0,1]$ y derivables en $(0,1)$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \ \text{ y } \ g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

por "TVMG" $\exists \xi \in (0,x)$ tq:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{1}{1-\xi^2}}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{\arccos x - \arccos 0}$$

notemos que $\arctan 0 = 0$ y $\arccos 0 = \pi/2$ luego

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x}$$

y como $\xi \in (0,x)$ se obtiene que

$$1 < \frac{\arctan x}{\frac{\pi}{2} - \arccos x} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

1.3 Reglas de L'Hopital

Teorema 1.4 (Reglas de L'Hopital) *Sean f y g dos funciones derivables en $(x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\}$, $\delta > 0$*

1. *si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ y ademas $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

2. *$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ y ademas $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.*

Ejemplos:

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} \neq \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)2x}$

  En este caso no se cumple el teorema pues $\frac{\ln(x+1)}{x^2+1}$ **No es forma L'Hopital.**

Formas L'Hopital

1. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, 1^∞.

2. 0^∞ **No es forma L'Hopital.**

2 Problemas

P1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un conjunto de datos medidos experimentalmente. Se llama función de densidad probabilidad a la función siguiente:

$$f(x) = A e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2}$$

Demostrar que $f(x)$ tiene un máximo global si $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$.

P2. Cual es el largo l máximo para el cual la vara pasa por el "corredor". (figura 2)

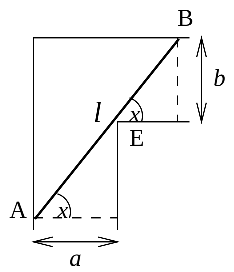


Figura 2: la vara y el corredor

P3. Sea ABC un triángulo isóceles con base $\overline{AB} = C$ y altura $\overline{CM} = h$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Sea P interior al triángulo sobre la altura $\overline{CM}$.

Se pide determinar para qué valor del ángulo $\widehat{PAM} = x$ la suma de las distancias de P a los vértices es mínima. Calcule el valor de dicha suma y compruebe que es mínima comparándola con las posiciones extremas de P en M y P en C. (Figura 3)

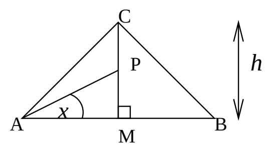


Figura 3:

P4. Sean $b > 0$, $a \in (-b, b)$ y $f\colon [-b, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (b^2 - x^2)(a - x)$$

1. Muestre que $\forall x \in (-b, b)$ y $\forall h \in [-b - x, b - x]$

$$f(x) - f(x + h) = -h(3x^2 - 2xa - b^2 + h^2 + 3xh - ah) \tag{1}$$

2. Muestre que f admite sólo un mínimo global y sólo un máximo global en $[-b, b]$.
   Ind: Determine los candidatos a extremos y utilice la ecuación 1 para probar que efectivamente son extremos.

3. Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-b, b]$ es $\frac{4}{27}\sqrt{a^2+3b^2}$ y calcule el valor de a que hace mínima esta diferencia.

P5. Sean $0 < a < b$. Sea f definida y continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b). Suponga que $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Mostrar que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

P6. Sea $P \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y acotada con k raices reales y distintas $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$. Sea $\alpha > 0$. Probaremos que $P(x) - \alpha P'(x)$ tiene al menos k raices reales distintas. Para ello consideremos la función

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}} P(x)$$

1. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular f'.
2. Probar que f' se anula al menos una vez en cada intervalo (r_i, r_{i+1}); $i : 1, \ldots, k-1$.
3. Probar que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.
4. Probar que f' tambien se anula en algún punto de (r_k, ∞).
5. concluya

3 Soluciones

P1. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ un conjunto de datos medidos experimentalmente. Se llama función de densidad probabilidad a la función siguiente:

$$f(x) = A e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2}$$

Demostrar que $f(x)$ tiene un máximo global si $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$.

Sol:
$f(x)$ es derivable en $\mathbb{R}$ (suma, composición y producto de funciones derivables).

$$f'(x) = A e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i - x)^2} \cdot (\sum_{i=1}^{n}(a_i - x))$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} x = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad nx = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

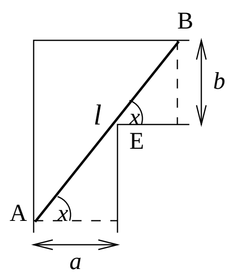
$\therefore \; x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ es punto crítico.

Si $x > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ entonces $f'(x) < 0$ luego f es decreciente.

Si $x < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ entonces $f'(x) > 0$ luego f es creciente.

$\Rightarrow$ en $x = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}$ $f(x)$ tiene un máximo global.

P2. Cual es el largo l máximo para el cual la vara pasa por el "corredor".



Sol:

$$\overline{AE} = \frac{a}{\cos x} \qquad \overline{EB} = \frac{b}{\operatorname{sen} x}$$

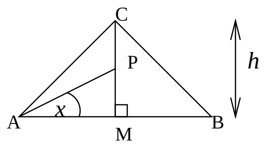
$$\therefore \quad l(x) = \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\operatorname{sen} x} \Leftrightarrow l(x) = a \sec x + b \csc x$$

$$\begin{aligned} l'(x) &= a \sec x \tan x - b \csc x \cot x \\ l'(x) &= 0 \Rightarrow \\ a \sec x \tan x &= b \csc x \cot x \\ \Rightarrow \tan(x) &= \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

luego $l(x^*)$ es máximo $\Leftrightarrow$ $x^* = \arctan \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$.
Propuesto: estudie la función $l(x)$, grafique.

P3. Sea ABC un triángulo isóceles con base $\overline{AB} = C$ y altura $\overline{CM} = h$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Sea P interior al triángulo sobre la altura $\overline{CM}$.

Se pide determinar para qué valor del ángulo $\widehat{PAM} = x$ la suma de las distancias de P a los vértices es mínima. Calcule el valor de dicha suma y compruebe que es mínima comparándola con las posiciones extremas de P en M y P en C. (Figura 3)



Sol:
Sea S la función "suma" de las distancias de P a los vertices.(¡S depende de x!)

$$S = 2l_1 + l_2$$

Calculemos l_1 y l_2:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{c/2}{l_2} \Rightarrow l_1 = \frac{c}{2\cos(x)} \\ l_2 &= h - \overline{PM} \\ \tan(x) &= \frac{\overline{PM}}{c/2} \Rightarrow \overline{PM} = \frac{c\tan(x)}{2} \end{aligned}$$

luego $S(x) = \frac{c}{\cos(x)} - \frac{c\tan(x)}{2} + h$.

Ahora queremos minimizar esta suma, Calculemos $S'(x)$

$$\frac{dS}{dx} = c \sec x \tan x - \frac{c}{2}\sec^2 x = \frac{c}{2\cos^2 x}(2 \operatorname{sen} x - 1)$$

$s'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \;\Longrightarrow\; x = \frac{\pi}{6}$

Finalmente $S(\frac{\pi}{6}) = h + \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

¡Compruebe que es mínima!

P4. Sean $b > 0$, $a \in (-b, b)$ y $f : [-b, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = (b^2 - x^2)(a - x)$$

1. Muestre que $\forall x \in (-b, b)$ y $\forall h \in [-b - x, b - x]$

$$f(x) - f(x + h) = -h(3x^2 - 2xa - b^2 + h^2 + 3xh - ah) \tag{2}$$

2. Muestre que f admite sólo un mínimo global y sólo un máximo global en $[-b, b]$.
   Ind: Determine los candidatos a extremos y utilice la ecuación 2 para probar que efectivamente son extremos.
3. Muestre que la diferencia entre el valor máximo y el valor mínimo de f en $[-b, b]$ es $\frac{4}{27}\sqrt{a^2 + 3b^2}$ y calcule el valor de a que hace mínima esta diferencia.

Sol:

1. Podemos escribir f como $f(x) = b^2a - x^2a - b^2x + x^3$.

$$\therefore\; f(x) - f(y) = (x - y)(x^2 - xy + y^2 - a(x + y) - b^2)$$

   tomando $y = x + h$ se obtiene el resultado pedido.
2. Los candidatos a extremos son aquellos puntos donde $f'(x) = 0$, más los extremos del intervalo.

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax - b^2$$

   luego $f'(x) = 0$ en $x_0 = \frac{a+\sqrt{a^2+3b^2}}{3}$ y en $x_1 = \frac{a-\sqrt{a^2+3b^2}}{3}$
   Veamos que x_1 es máximo global. Usando la parte 1:

$$f(x_1) - f(x_1 + h) = -h(\underbrace{3x_1^2 - 2ax_1 - b^2}_{f'(x_1)=0} + 3x_1h + h^2 - ah)$$

3. Utilizando la parte 1, tomando $h = |x_1 - x_0|$ obtenemos

$$d = |f(x_0) - f(x_1)| = (x_0 - x_1)^2|x_0 - x_1 - 3x_0 + a| = \frac{4}{27}\sqrt{a^2 + 3b^2}$$

P5. Sean $0 < a < b$. Sea f definida y continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b). Suponga que $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$. Mostrar que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$.

Sol:
Para que la tangente a f en el punto c pase por el origen es necesario que $f'(c) = \frac{f(c)}{c}$ ver Figura 4

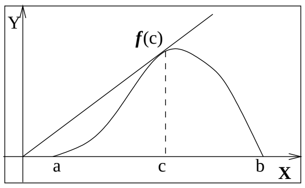


Figura 4: Notemos que la pendiente de la recta tangente en c es $\frac{f(c)}{c}$.

Consideremos entonces $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $g(x)$ es continua en [a,b] y derivable en (a, b) ademas $g(a) = g(b) = 0$. Utilizando el teorema del valor medio para g se tiene que $\exists c \in (a, b)$ tq :

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c)$$

por lo tanto

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) \text{ tq } f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

Si $a = 0$ estudie que pasa con $\lim_{x \to 0} g(x)$.

P6. Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y acotada con k raices reales y distintas $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$. Sea $\alpha > 0$. Probaremos que $P(x) - \alpha P'(x)$ tiene al menos k raices reales distintas. Para ello consideremos la función

$$f(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}} P(x)$$

1. Probar que f es derivable en $\mathbb{R}$ y calcular f'.
2. Probar que f' se anula al menos una vez en cada intervalo (r_i, r_{i+1}); $i : 1, \ldots, k - 1$.
3. Probar que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$.
4. Probar que f' tambien se anula en algún punto de (r_k, ∞).
5. concluya.

Sol:

1. f es derivable pues es producto de dos funciones derivables

$$f'(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \cdot P(x) + e^{-\frac{x}{\alpha}} \cdot P'(x)$$

por lo tanto

$$f'(x) = -\frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} (P(x) - \alpha P'(x))$$

2. Primero notemos que f' se anula en algun punto *ssi* $P(x) - \alpha P'(x)$ se anula pues $-\frac{1}{\alpha}e^{-\frac{x}{\alpha}} \neq 0$ siempre.

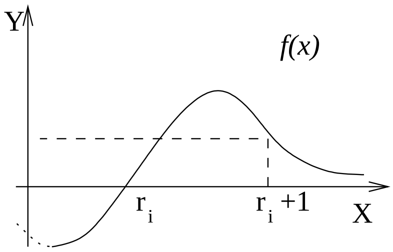
   Consideremos el intervalo (r_i, r_{i+1}), vemos que $f(r_i) = f(r_{i+1}) = 0$ y por lo tanto aplicando el *Teorema de Rolle* se tiene que existe $c \in (r_i, r_{i+1})$ tq $f'(c) = 0$ y esto se tiene para $i = 1, \ldots, n$

3. Notemos que $|P(x)| \leq M$ pues $P(x)$ es acotada, luego

$$-Me^{-\frac{x}{\alpha}} \leq f(x) = e^{-\frac{x}{\alpha}}P(x) \leq Me^{-\frac{x}{\alpha}}$$

   y como $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{\alpha}} = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

4. Consideremos el siguiente esquema



   Tomemos $f(r_k + 1)$ por hipótesis es $\neq 0$, ademas $\forall x > r_k$ se tiene que $f(x) > 0$ o bien $f(x) < 0$ supongamos sin perdida de generalidad que $f(x) > 0$. En el intervalo $[r_k, r_k + 1]$ f es continua y como este es un conjunto cerrado y acotado entonces f alcanza su máximo y mínimo valor, notemos que $f(r_k) = 0$ es mínimo como f es diferenciable en $(r_k, r_k + 1)$ se tiene que si x^* es tal que $f(x^*)$ es máximo entonces $f'(x^*) = 0$ o bien el máximo se alcanza en $x^* = r_k + 1$. Si el máx. se alcanza en $r_k + 1$ entonces supongamos que $f'(r_k + 1) \neq 0$ (si $f'(r_k + 1) = 0$ estamos listos)
   Pregunta: ¿existira'$\delta > r_k + 1$ tal que $f(r_k + 1) = f(\delta)$?
   Supongamos que nó, entonces

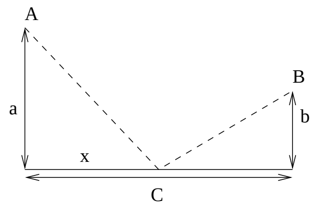
   - $f(x) < f(r_k + 1)$ $\forall x > r_k + 1$ esto es contradictorio pues quiere decir que en $(r_k, r_k + 1)$ la función alcanzaba su máximo.
   - $f(x) > f(r_k + 1)$ $\forall x > r_k + 1$ esto no puede suceder pues la función tiende a cero cuando $x \to \infty$

   luego existe $\delta > r_k + 1$ tal que $f(r_k + 1) = f(\delta)$ y por *Teorema de Rolle* se tiene que $\exists \xi \in (r_k + 1, \delta)$ tal que $f'(\xi) = 0$

5. Concluir.

4 Problemas Propuestos

- Cual es la distancia x que minimiza el camino rrecorrido.



- Cual es el cilindro de volumen máximo y inscrito en el cono (figura 5), y el cono de volumen mínimo (figura 6).

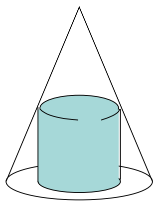


Figura 5: cilindro de volumen máximo

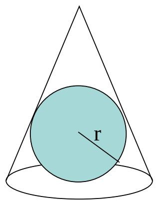


Figura 6: cono de volumen mínimo

- Cual es el cilindro y el cono de volumen máximo inscrito en la esfera.

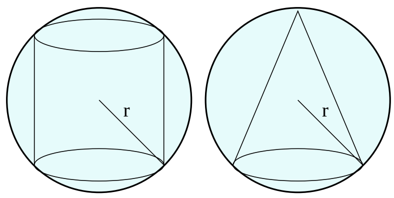


Figura 7: cilindro y cono de volumen máximo

- Se dice que una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a,b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$$

  Cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tales que: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$.
  Demuestre que si f es derivable en $[a,b]$ y f' es acotada en (a,b) entonces f es de variación acotada en $[a,b]$.
  ind. Utilice el teorema del valor medio.

- Una lamina de zinc de ancho l es plegada para obtener una canaleta trapezoidal. se desea determinar los valores de $x \in [0, \frac{l}{2}]$ y $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ para los cuales el área del trapecio es máxima.

- Teniendo en cuenta el problema 2 ahora la pregunta es cual es la dimension máxima para la cual el rectangulo pasa por el "corredor". (figura 8)

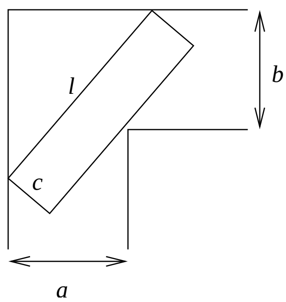


Figura 8: a, b, c son datos del problema

- Cual es la posición ideal para sentarse en el cine