Trabajo Dirigido 1: MA1A2 Cálculo Diferencial

Profesor: Miguel Carrasco
Auxiliar: Germán Ibarra

21 de Agosto de 2007

Problema 1.-

(i) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$.

(a) Pruebe que existen $\underline{x}, \overline{x} \in [a, b]$ tales que:

$$f(\underline{x}) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}) \quad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

(b) Demuestre que dados $x_1, x_2 \in [a, b]$ cualequiera, existe $\beta \in [a, b]$ tal que:

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

Hint: Considere los Teoremas de funciones continuas en un intervalo $[a, b]$

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$$f(x) \leq 0, \ \forall x \leq 0$$

$$f(x) \geq 1, \ \forall x > 0$$

Pruebe que f no es continua en 0.

Pregunta 2.-

(i) Sean $0 < a < b$. Sea f definida y continua sobre $[a, b]$ y derivable sobre (a, b). Suponga que $f(a) = f(b) = 0$ y $f'(a) = 0$ mostrar que existe $c \in (a, b)$ de modo que la tangente a f en el punto c pasa por el origen. Analice que pasa si $a = 0$

(ii) Sea f continua en $[0, \infty)$ diferenciable en $(0, \infty)$ y tal que $f(0) = 0$ y f' es creciente en $\mathbb{R}^+$

(a) Use el teorema del Valor Medio para probar que $f'(x) > \frac{f(x)}{x}$ en $\mathbb{R}^+$

(b) Deduzca que la función $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ es creciente en $\mathbb{R}^+$

(iii) Demostrar usando el teorema del valor medio generalizado que $\forall x \in (0, 1)$

$$1 < \frac{\arg(\tanh(x))}{\frac{\pi}{2} - \arccos(x)} < \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Hint: recuerde que $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

Problema 3.- Considere la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta (1 - e^x) \operatorname{sen} \frac{1}{x} & , \text{si } x \neq 0 \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(i) Justifique porque f es continua $\forall x \in \mathbb{R} - 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$

(ii) Pruebe que si $\beta > -1$, entonces f es continua $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) Para $\beta = -1$, utilice la sucecion $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.