Problemas Continuidad: MA1A2 Cálculo Diferencial

Profesor: Miguel Carrasco
Auxiliar: Germán Ibarra

14 de Agosto de 2007

Problema 1.-*(Continuidad. P4 Guia 1)* Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{Si } x \in \mathbb{Q} \text{ y } x = \frac{p}{q} \text{ la expresión irreductible de } x \\ 0 & \text{Si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que f es continua en los irracionales y que no lo es para cualquier punto racional.

Solución:

Primero analizaremos solo los $x \geq 0$, el lado negativo se resolvera de manera analoga.

$f(x)$ no es continua en los racionales.

En efecto, sea $a > 0$ racional. Claramente $f(a) \neq 0$. Por la densidad de los irracionales en $\mathbb{Q}$, podemos tomar una sucesión (x_n) con limite a, donde $x_n \in \mathbb{I}, x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Luego se tendra que para todo x_n, $f(x_n) = 0$ por lo tanto

$$\exists (x_n) \text{ sucesión tal que } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ y } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq f(a)$$

Por lo tanto, no puede ser continua para ningun valor racional.

$f(x)$ es continua en los irracionales

Primero recordemos las caracterización $\epsilon - \delta$ de la continuidad:

$$g(x) \text{ es continua en } a \Leftrightarrow \forall \epsilon, \exists \delta, \text{ tal que si } \forall x \text{ se cumple que } |x - a| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(a)| < \epsilon$$

Consideremos $a > 0$ un número irracional. Sea $\epsilon > 0$. Por la propiedad de Arquimides, existe $q_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Es importante hacer notar que la representación de a es la irreductible (o dicho de otra forma son primos relativos los dos valores).Si consideramos un intervalor acotado fijo en $\mathbb{R}$, notemos que para cualquier $q \in \mathbb{N}$ hay solo un numero finito de valores de la forma $fracpq$ que caen en el intervalo. Esto es porque solo hay que considerar los p que son primos relativos a q y que $p \in \mathbb{N}$ (Lo importante es que el intervalo es acotado). Luego considerando todos los valores que son menores a q_0, se tendra que para un intervalo fijo, hay un número finito de numeros de la forma $\frac{p}{q}$ que caen en el intervalo, con $\in \{0, \ldots, q_0 - 1\}$.
Tomemos ahora δ igual a la menor de las distancias desde a a cada uno de estos valores. Notemos que δ sera mayor que 0 ya que ninguno de los valores de la forma $\frac{p}{q}$ es igual a a, pues este último es irracional. Entonces ahora sea un $x \in (a - \delta, a + \delta)$:

$$\text{Si } x \in \mathbb{Q} \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |0 - 0| = 0 < \epsilon$$

$$\text{Si } x \in \mathbb{I} \Rightarrow |f(x) - f(a)| = |\frac{1}{q} - 0| < \frac{1}{q} < \frac{1}{q_0} < \epsilon$$

Luego se cumple la caracterización $\epsilon - \delta$ para los irracionales, y por lo tanto $f(x)$ es continua para los irracionales

Problema 2.- Si $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=k,\ k\in\mathbb{R}$$

Pruebe entonces que $f(x)$ es uniformemente continua en $[a,+\infty)$.

Solución:

Recordemos primero la definición de continuidad uniforme:

$g(x)$ es uniformemente continua $\Leftrightarrow \forall\epsilon, \exists\delta(\epsilon),$ tal que si $\forall x,y$ se cumple que $|x-y|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\epsilon$

La diferencia con la definición de continuidad, y lo importante, es que δ solo depende de ϵ.

Sea $\epsilon>0$. Por definición de límite, existe $d>0$ tal que

$$x\geq d \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)-k|<\frac{\epsilon}{2}$$

Por lo tanto, en $[d,+\infty)$ se cumple la condición $\epsilon-\delta$ de la continuidad uniforme, ya que para cualesquiera dos puntos del intervalo, sus imagenes estaran a una distancia de menos de ϵ. Además, por Theorema visto en clases, y como $f(x)$ es continua, se cumple que $f(x)$ sera uniformemente continua en $[a,k+1]$. (Se cumple la propiedad para ϵ). De esta forma, y juntando las dos condiciones anteriores, se cumple la propiedad en $[a,+\infty)$