

Auxiliar #3 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 Resumen

1.1 Algebra de derivadas

Sean $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables en $x_0 \in (a, b)$

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'(x_0) \ (\forall \alpha \in \mathbb{R})$
3. $(fg)'(x_0) = (f'g + g'f)(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(\frac{f'g - g'f}{g^2}\right)(x_0)$ (siempre que $g(x_0) \neq 0$)

1.2 Algunas derivadas importantes

1. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
2. $(e^x)' = e^x$
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ (con $x > 0$)
4. $(\sin x)' = \cos x$
5. $(\cos x)' = -\sin x$

Teorema 1.1 (derivada de una composición de funciones) Sea f diferenciable en x_0 y g diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es diferenciable en x_0 y se cumple que:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Ejemplo:

$$(\sin(\tan(x^2)))' = \cos(\tan(x^2)) \sec^2(x^2) 2x$$

1.3 Derivada de la función inversa

Sea $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ continua y biyectiva. Sea $x_0 \in (a, b)$, si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$ entonces f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Ejemplo: Derivada de la función $x = \ln(y)$

$$(\ln y)' = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}$$

Propuesto: Demuestre que

- $(\arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $(\arg \sinh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $(\arg \cosh)'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $(\arg \tanh)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

1.4 Derivada de la función implícita

No siempre en una función es posible despejar $y = f(x)$, en estos casos derivaremos “ y ” por la “regla de la cadena” como si fuera una variable dependiente de x .

Ejemplo:

$$\begin{aligned} y^{\frac{2}{3}} - x &= 0 & \left| \frac{d}{dx} \right. \\ \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} \cdot y' &= 1 \end{aligned}$$

Este caso es sencillo, incluso podemos despejar $y = f(x)$ pero no siempre serán problemas de este tipo. Por ejemplo: Calcule $\frac{d}{dx}$ de

$$yx + \sen(x^2y) - 2x \ln y - 1 = 0$$

2 Problemas

- P1. Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (derivables), donde $i: 1, \dots, n$. Sea $G_n = f_1(f_2(\dots(f_n(x)))) \dots$
Demuestre que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(\dots(f_n(x)))) \dots)$$

- P2. Se sabe que la función $f(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$f''(x) - kf'(x) = f(x)$$

Demostrar que la función $g(x) = f(x)e^{-kx}$ satisface la ecuación diferencial:

$$g''(x) + kg'(x) = g(x)$$

- P3. Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt[3]{1 + \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}$
2. $y = \operatorname{sen}(x^{\cos x}) + \cos(x^{\operatorname{sen} x})$
3. $y = \sqrt[n]{\frac{x - \tan x}{x + \sec x}}$
4. $y = \operatorname{arcsen}\left(\frac{3 \operatorname{sen} x}{4 + 5 \cos x}\right)$

- P4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de $n \in \mathbb{N}$ para que:

1. f sea continua en $\mathbb{R}$
2. f sea derivable en $\mathbb{R}$
3. f' sea continua en $\mathbb{R}$

3 Soluciones

- P1. Sean f_i funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (derivables), donde $i: 1, \dots, n$. Sea $G_n = f_1(f_2(\dots(f_n(x))\dots))$. Demuestre que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(\dots(f_n(x))\dots)))$$

Sol: Por inducción sobre n .

$$\begin{aligned} n=1 \quad G(x) &= f_1(x) \\ G'(x) &= f'_1(x) = \prod_{i=1}^1 f'_i(x) \end{aligned}$$

supongamos que para n se cumple que:

$$G'_n(x) = \prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(f_{i+2}(\dots(f_n(x))\dots)))$$

entonces para $n+1$ notemos que $G_{n+1}(x) = (G_n \circ f_{n+1})(x)$

$$\begin{aligned} \therefore G'_{n+1}(x) &= G'_n(f_{n+1}(x)) \cdot f'_{n+1}(x) \\ &\stackrel{\text{Hip}}{=} \left[\prod_{i=1}^n f'_i(f_{i+1}(\dots(f_n(f_{n+1}(x)))\dots)) \right] \cdot f'_{n+1}(x) \\ &= \prod_{i=1}^{n+1} f'_i(f_{i+1}(\dots(f_{n+1}(x))\dots)) \end{aligned}$$

- P2. Se sabe que la función $f(x)$ satisface la ecuación diferencial:

$$f''(x) - kf'(x) = f(x)$$

Demostrar que la función $g(x) = f(x)e^{-kx}$ satisface la ecuación diferencial:

$$g''(x) + kg'(x) = g(x)$$

Sol:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-kx} + f(x)(-ke^{-kx}) = e^{-kx}(f'(x) - kf(x)) \\ g''(x) &= -ke^{-kx}(f'(x) - kf(x)) + e^{-kx}(\underbrace{f''(x) - kf'(x)}_{f(x)}) \\ \therefore g''(x) &= -ke^{-kx}(f'(x) - kf(x)) + e^{-kx}f(x) \end{aligned}$$

reemplazando:

$$\begin{aligned} g''(x) + kg'(x) &= \left[e^{-kx}f(x) - ke^{-kx}(f'(x) - kf(x)) \right] + k \left[e^{-kx}(f'(x) - kf(x)) \right] \\ &= e^{-kx}f(x) = g(x) \end{aligned}$$

P3. Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1. $y = \sqrt[3]{1 + \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}$
2. $y = \sin(x^{\cos x}) + \cos(x^{\sin x})$
3. $y = \sqrt[n]{\frac{x - \tan x}{x + \sec x}}$
4. $y = \arcsen\left(\frac{3 \sin x}{4 + 5 \cos x}\right)$

Sol:

1. $y = \sqrt[3]{1 + \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}$

$$\left(\sqrt[3]{1 + \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)}\right)' = \frac{1}{3} \left(1 + \tan\left(\frac{x}{1+x^2}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{1+x^2}\right) \cdot \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

2. $y = \sin(x^{\cos x}) + \cos(x^{\sin x})$

utilizando la regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^{\cos x})(x^{\cos x})' - \sin(x^{\sin x})(x^{\sin x})'$$

Calculemos $(x^{\cos x})'$:

$$\begin{aligned} y &= x^{\cos x} \\ \ln y &= \cos x \ln x \\ \text{derivando } \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} \cos x + (-\sin x) \ln x \\ \text{luego: } y' &= y \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \\ &= x^{\cos x} \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \ln x \right) \end{aligned}$$

analogamente se obtiene la derivada de $x^{\sin x}$.

Reemplazando ambas expresiones en la original se obtiene el resultado.

3. $y = \sqrt[n]{\frac{x - \tan x}{x + \sec x}}$

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x - \tan x}{x + \sec x}\right)^{\frac{1}{n}} \\ y' &= \frac{1}{n} \left(\frac{x - \tan x}{x + \sec x}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \left(\frac{x - \tan x}{x + \sec x}\right)' \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula de la derivada de una división $\left(\left(\frac{f}{g}\right)'\right) = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ se tiene:

$$\left(\frac{x - \tan x}{x + \sec x}\right)' = \frac{(1 - \sec^2 x)(x + \sec x) - (1 + \sec x \tan x)(x - \tan x)}{(x + \sec x)^2}$$

Reemplazando esto último en la ecuación anterior se obtiene el resultado.

4. $y = \arcsen\left(\frac{3 \operatorname{sen} x}{4+5 \cos x}\right)$, propuesto.

P4. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}^n(x)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Determinar los valores de $n \in \mathbb{N}$ para que:

1. f sea continua en $\mathbb{R}$
2. f sea derivable en $\mathbb{R}$
3. f' sea continua en $\mathbb{R}$

Sol:

1. Si $x \neq 0$, $f(x)$ es continua (cuociente de continuas), ¿Que pasa en “ 0 ” ?

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}^{n-1}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}^{n-1}(x) \\ &= 0 = f(0) \end{aligned}$$

Esto solo se tiene si $n - 1 > 0$, y por lo tanto f es continua en $\mathbb{R} \Leftrightarrow n > 1$.

2. Calculemos $f'(x)$ para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{x \cdot n \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cdot \cos x - \operatorname{sen}^n x}{x^2}$$

Ahora para $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}^n x}{x} - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}^n x}{x^2} \end{aligned}$$

y este límite existe solo si $n \geq 2$, además:

$$f'(0) = \begin{cases} 0 & n > 2 \\ 1 & n = 2 \end{cases}$$

Notemos que si $n = 1$, $f(x)$ **no es continua** y por lo tanto tampoco es derivable.

3. Calculemos $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot n \operatorname{sen}^{n-1}(x) \cos x - \operatorname{sen}^n x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} n \cos x \operatorname{sen}^{n-2}(x) \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \operatorname{sen}^{n-2}(x) \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \end{aligned}$$

Si $n = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 1$$

Si $n > 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Luego f' es continua en 0 para $n \geq 2$, para $x \neq 0$ y $n \geq 2$ se tiene que f' es continua por álgebra de funciones continuas. Por lo tanto f' es continua en $\mathbb{R} \quad \forall n \geq 2$.