U. DE CHILE

INGENIERIA

Escuela de Ingeniería. FCFM-U. de Chile.
CALCULO MA–12A
Guía de Problemas No. 3, 2003

Funciones Continuas y Límites

Índice

1. Problemas

[1] Determinar la veracidad de las siguientes afirmaciones, **justificando claramente** su respuesta.

- Una función f es continua en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si existe una sucesión (a_n) que converge a x_0 y tal que $f(a_n)$ converge a $f(x_0)$.
- Toda función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ alcanza su mínimo.
- Toda función acotada inferiormente y decreciente alcanza su mínimo.
- Es equivalente decir: (i) $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}\, f : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon$
  (ii) Cualquiera sea la sucesión de puntos en $\mathrm{Dom}\, f$ propiamente convergente a x_0, la sucesión de sus imágenes es convergente a l.
- (i) $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n \ \ \forall n \in \mathbb{N}$ (ii) $\lim\limits_{x\to x_0} x^q = x_0^q \ \ \forall q \in \mathbb{Q}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} |x| = |x_0|$
- (i) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)}{x} = 0$
- (i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 + 7x + 1) = 15$ (iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^2-a^2)}{(x-a)} = 1 + a$
- $\lim\limits_{x\to a} \frac{(x^n-a^n)}{(x-a)} = 1 - a^{n-1}$
- Si $f(x) < g(x)\ \forall x \in V_r(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, entonces $a < b$.
- Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x^2)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.
- Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Si existen $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x))$, entonces existe $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $|f(x)| \le |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces f es continua en 0.
- Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en 0 y verifica $f(x+y) = f(x)f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces f es continua en cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.
- Toda función Lipschitziana en su dominio es uniformemente continua sobre él.
- Toda función estrictamente creciente y biyectiva es continua.
- Toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado es uniformemente continua sobre él.

[2] Usando la definición $(\epsilon - \delta)$ demuestre:

(i) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{5}{x-2} = 5$ (ii) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{1}{4}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 8} \sqrt{x+1} = 3$

(iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{2}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) = 0$ (vi) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{1+\mathrm{sen}^2 x} = 0$

[3] Demuestre que (i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = l$

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) - l) = 0$

[4] Demuestre que (i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x^3) = l$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(-x)$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(|x|)$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$

[5] Sean a, x_0, b tales que $a < x_0 < b$ y f una función cuyo dominio incluye al conjunto $[a, x_0[\cup]x_0, b[$. Demuestre que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

[6] Determinar puntos de continuidad de las siguientes funciones

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $\frac{x^3-x}{x-1}$ (iii) $\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$ (iv) $\frac{e^x}{x}$ (v) $\frac{\ln(1+x)}{\mathrm{sen}(x)}$ (vi) $\sqrt{1+\ln^2(1+x^3)}$ (vii) $\frac{\cos(x)-\mathrm{sen}(x)}{\cos(2x)}$.

[7] Estudie la existencia de asíntotas verticales en las siguientes funciones.

1. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$
2. (i)$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (ii) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$ (iii) $f(x) = \frac{1}{|x|-1}$

[8] Calcular los siguientes límites

1. (i) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5}{x-3}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ (iii) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt{x-b}-a-b}{x^2-a^2}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to \pi/2} (\frac{\pi}{2} - x)\tan x$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{sen}\,x}{x\,\mathrm{sen}\,3x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$
3. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} [\frac{x}{a}]\frac{b}{x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} (1+3\tan^2 x)^{cot^2 x}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (1+\frac{2}{x})^x$
4. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x}{1+x})^x$ (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\cos(\frac{a}{x}))^x$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2(1-\cos(\frac{1}{x}))$
5. (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{ax+b}{\sqrt{cx^2+d}}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
6. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3(e^x-1)}{(1-\cos 2x)^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln(\frac{x+a}{x-a})$

[9] Determinar el valor de c, si se sabe que: $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x+c}{x-c})^x = 4$

[10] Estudiar si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, en que $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \\ \frac{2x^2-3}{x^2+3} & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$

[11] Calcular las asíntotas oblicuas para las siguientes funciones:

1. (i) $f(x) = \frac{x^2+a}{x}$ (ii) $f(x) = \sqrt{x^2-a^2}$
2. (i) $f(x) = (1-e^{-x})(mx+n)$ (ii) $f(x) = x^2\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x})$

[12] Dada la función definida por $f(x) = \ln(1+e^x)$ se pide:

i) Determinar dominio, recorrido, ceros, intersección con el eje Y, asíntotas de todo tipo y bosquejar su gráfico.

ii) Determinar la ecuación de la función inversa y bosquejar su gráfico.

[13] Estudiar las siguientes funciones:

1. (i) $f(x) = x\ln(e + \frac{1}{x})$ (ii) $f(x) = e^{1/x}(1 + \frac{1}{x})$ (iii) $f(x) = e^{-1} + xe^{1/x}$
2. (i) $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ (ii) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2-1}}$

[14] Dada la función: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-1/x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ demostrar que

(i) f es continua en $\mathbb{R}$. (ii) Encontrar las asíntotas de f

[15] Considere las siguientes funciones $d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. ¿Cuales de ellas definen una métrica en $\mathbb{R}$?

1. (i) $d(x,y) = 0$ (ii) $d(x,y) = |x|$ (iii) $d(x,y) = x - y$
2. (i) $d(x,y) = (x-y)^2$ (ii) $d(x,y) = |x| - |y|$ (iii) $d(x,y) = |x| + |y|$

[16] (i) Sea $E \neq \emptyset$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injectiva. Probar que $d : E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$ es una métrica en E.

(ii) Utilice (i) para decidir cuál(es) de las funciones siguientes son métricas en $\mathbb{R}$.

1. (i) $d(x,y) = |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y|$ (ii) $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$
2. (i) $d(x,y) = ||x| - |y||$ (ii) $d(x,y) = |e^x - e^y|$

[17] Determine los interiores, adherencias y fronteras (respecto a la métrica usual en $\mathbb{R}$) de los siguientes conjuntos:

1. (i) $[0,1]$ (ii) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $]-2,4[$
2. (i) $[1,7] \cup]5,7[$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 3\}$ (iii) $\mathbb{N}$
3. (i) $\mathbb{Q}$ (ii) $\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
4. (i) $\mathbb{Q}^+$ (ii) $\{\frac{m+n}{mn} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$

[18] Determine los puntos de acumulación de los conjuntos siguientes e indique si son abiertos o cerrados.

1. (i) $(-\infty,3] \cup [5,+\infty)$ (ii) $\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (iii) $\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^m} \mid m,n \in \mathbb{N}\}$
2. (i) $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x-1}{x+1} < 0\}$ (ii) $\{x \in \mathbb{R} \mid \ x = \frac{\operatorname{sen} \frac{n^2\pi}{2}}{1+\cos \frac{n^2\pi}{2}}, n \in \mathbb{N}\}$
3. $\{-1,1\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid \ x = (1+\frac{1}{n})^{(-1)^n}, n \in \mathbb{Z}^+\}$

[19] Probar que

1. (i) $\operatorname{Int}(A) \subset A$ (ii) $A \subset \operatorname{Adh}(A)$
2. (i) $\operatorname{Adh} A = (\operatorname{Int}(A^c))^c$ (ii) $\operatorname{Int} A = (\operatorname{Adh}(A^c))^c$
3. (i) $A \subset B \Rightarrow \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$ (ii) $A \subset B \Rightarrow adhA \subset \operatorname{Adh} B$
4. (i) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$ (ii) $\operatorname{Adh}(\operatorname{Adh} A) = \operatorname{Adh} A$
5. (i) Probar que $\operatorname{Fr}(A) = \operatorname{Adh} A \setminus \operatorname{Int} A$ (ii) Probar que $\operatorname{Adh} A \cup \operatorname{Adh} B = \operatorname{Adh}(A \cup B)$
6. (i) $\operatorname{Adh}(A \cap B) \subset \operatorname{Adh} A \cap \operatorname{Adh} B$ (ii) $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} A^c$ (iii) $\operatorname{Fr} A$ es cerrado.

2. Preguntas de Controles de años anteriores

[1] Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que: $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{x_{n+1}}{x_n}| = r < 1$,

1. Pruebe que: $(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ |x_{n+1}| \leq (r+\epsilon)|x_n|$. (Ind. $|x| - |y| \leq |x-y|$).
2. Concluya que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

[2] (i) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas, demostrar que $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, es continua.

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall x, y \in \mathbb{R}),\ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y|$, demuestre que f es continua.

[3] Considere la funcion$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi/2x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ \alpha & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

Demostrar que no hay forma de elegir α de modo que f sea continua en 0.

[4] Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, se define la funcion $f \colon \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = \max\{g(t), t \in [0, x]\}$. Demostrar que si $x_0 \in \mathbb{R}_+$ es tal que: $g(x_0) < f(x_0)$, entonces $(\exists \epsilon > 0)$ tal que f es constante en el intervalo $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$

[5] Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x(x-1)}$ y reparar sus discontinuidades.

[6] Calcular los siguientes límites si es que existen.

1. (i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^p - a^p}{x^p}$, $p > 0$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} nx}{\operatorname{sen} mx}$, $m \neq 0, n \neq 0$ (iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x^2}{1-\cos x}$
2. (i) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a}{x-a}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3(e^x-1)}{(1-\cos 2x)^2}$ (iii) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

[7] Determinar el dominio y estudiar la continuidad de la función$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{e^{2x}-1}$. ¿Cómo se debe definir f en $x = 0$ de modo que resulte continua en dicho punto?.
Indicación: recordar que $1 + x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}, x < 1$.

[8]
1. Determine el dominio y puntos de continuidad de la función:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x + \ln(x) & \text{si} \quad 1 < x \leq 2 \\ \arctan((x-2)^2) & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$
2. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) > 0$. Probar que existe $\delta > 0$ tal que $g(x) > 0$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

[9]
1. Demuestre que la función $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x} & \text{si} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ es uniformemente continua.
2. Demuestre que la función $\tan : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ no es uniformemente continua.

[10] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface las siguientes propiedades:

(1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) + f(y)$ (2) f es continua en 0.

Demuestre que:

1. f es uniformemente continua
2. $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = xf(1)$

[11] Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones.

(i) $\left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$ (ii) $\left(\frac{4n+\frac{1}{3}}{4n+1}\right)^n$

(iii) $\left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{a^n+b^n}\right)$, con $a > b > 0$. (iv) $\frac{(-n)^{n+1}}{(n+1)^n}$

[12] 1. Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una función (no idénticamente nula) que satisface

$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$

Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio. (ind: Demuestre que $h(1) = 0$).

2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$

a) Muestre que:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$$

b) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.

c) Probar que si g es continua en a y a_n es una sucesión que converge a a, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$$

existe y vale $-g(a)$.

[13] Para

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{(1 - x)^2}{(x - 2)}$$

determinar

1. Dominio, ceros y signos.
2. Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
3. Conjunto de puntos de continuidad.
4. Gráfica.

[14] Determinar el conjunto de parámetros (a, b, c) con $a, b, c > 0$ para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a\,\mathrm{sen}(bx)}{x} & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\ln(c+(a+b)x)}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$.

[15] Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua.

1. Suponga que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$. Pruebe que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 + f(x) = 0$.
2. Suponga que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0$. Pruebe que existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $y^2 + f(y) \leq x^2 + f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Indicación: Utilice los teoremas centrales de las funciones continuas.

3. Autoevaluación Control #3 Año 2002

Puntuación: P1.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P2.- (ia)2, (ib)2, (ii)2, P3.- (i)1.5, (ii)1.5, (iii)1.5, (iv)1.5.

P1.- Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3+s_n^2}{a+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Demuestre por inducción que $s_n > a$, $\forall n \geq 1$.

(ii) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L.

(iii) Encuentre el valor de L. Justifique rigurosamente su resultado.

Pauta.- **(i)** Para $n = 1$ es cierto que $s_1 = 2a > a$ [**0/0.25/0.5pto**].
Si suponemos que $s_n > a$ entonces

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3+s_n^2}{a+1}} > \sqrt{\frac{a^3+a^2}{a+1}} = \sqrt{\frac{a^2(a+1)}{a+1}} = a$$

[**0/0.5/1/1.5pto**].

(ii) Demostraremos que $s_{n+1} - s_n < 0$, en efecto

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{\sqrt{a^3+s_n^2}}{\sqrt{a+1}} - s_n \\ &= \frac{\sqrt{a^3+s_n^2} - s_n\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a^3+s_n^2} - \sqrt{s_n^2\, a + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pues de la parte **(i)** se ve que $s_n^2\, a > a^3$ [**0/0.5/1.0/1.5pto**] (obviamente esta cota es posible obtenerla con otras manipulaciones algebraicas). Como s_n es decreciente y acotada inferiormente es en consecuencia convergente a un real L [**0/0.5pto**].

(iii) Ya que s_{n+1} es una subsucesión de s_n, ella es también convergente al mismo límite L [**0/0.25pto**]. Tomando límite en la expresión que define la sucesión se obtiene:

$$L = \frac{\sqrt{a^3+L^2}}{\sqrt{a+1}}$$

[**0/0.25/0.5/0.75/1pto**] de donde $L^2(a+1) = a^3 + L^2$ y se deduce que $L^2 = a^2$ o bien $L = \pm a$ [**0/0.25/0.5pto**]. Ahora como $s_n > a$ entonces $L \geq a$ de donde se deduce que la única posibilidad es $L = a$ (el límite es único) [**0/0.25pto**].

P2.- Sea $a > 0$.

(i) **Utilizando** las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1, \qquad 1 + x \leq \exp(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

(a) Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,

(b) Si $s_n \to -a$ con $s_n > -a$.

(ii) Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{x}{a^2-x^2}\right) & \text{si} \quad -a < x < a \\ \alpha & \text{si} \quad x \leq -a \\ \beta & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a \quad \text{y/o} \quad x = a$. Justifique claramente su respuesta.

Indicación: en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

Pauta.- **(i)** **(a)** Utilizaremos la primera desigualdad. Primero verificamos que

$$-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 1$$

para n suficientemente grande. En efecto, como $s_n \to a$, $s_n < a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < 0 < s_n < a$, entonces $-\frac{s_n}{a^2-s_n^2} < 0 < 1$ para n grande [**0/0.25/0.5pto**] (también se puede argumentar deduciendo que $-\frac{s_n}{a^2-s_n^2} \to -\infty$). En seguida, aplicando la primera desigualdad (y que $\exp(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$) tenemos

$$0 \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \leq \frac{s_n(a^2 - s_n^2)}{a^2 - s_n^2 + s_n}.$$

Por álgebra de límites de sucesiones, el término de la derecha tiende a $\frac{a(a^2-a^2)}{a^2-a^2+a} = 0$. Utilizando el Teorema de comparación para sucesiones (sandwich) se obtiene que la sucesión estudiada es convergente a cero [**0/0.5/1/1.5pto**].

(i) **(b)** De la segunda desigualdad

$$1 - \frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

Por álgebra de límites, el lado izquierdo diverge a $+\infty$ (el signo hay que justificarlo, por ejemplo notar que como $s_n \to -a$, $s_n > -a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < s_n < 0 < a$ de donde $1 - \frac{s_n}{a^2-s_n^2} > 0$ para n grande, o bien explicar que $s_n^2 \to a^2$ con $s_n^2 > a^2$ y deducir por álgebra de límites divergentes que $\frac{s_n}{a^2-s_n^2} \to -\infty$ [**0/0.25/0.5pto**]), de donde por comparación (sandwich) se obtiene que el límite pedido es $+\infty$ [**0/0.5/1/1.5pto**].

(ii) Esta parte se puede resolver utilizando sucesiones o límites laterales de funciones. Se dan ambas opciones en la pauta.

- **Opción sucesiones:** Sea s_n una sucesión convergente a $x = -a$ con $s_n \leq -a$, es claro de la definición de f que

  $$f(s_n) = \alpha \to \alpha \quad \text{si } n \to \infty.$$

  Sea ahora s_n una sucesión convergente a $x = -a$ con $s_n > -a$, es claro de la parte **(i)(b)** que

  $$f(s_n) \to +\infty \quad \text{si } n \to \infty.$$

  Entonces f es no puede ser continua en $x = -a$ para ningún valor de α. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**].

  Sea s_n una sucesión convergente a $x = a$. Esta sucesión la separamos en dos: la de los términos mayores o iguales que a y la de los términos menores que a. Si los términos mayores o iguales que a son un número finito, no los consideramos, si son un número infinito, constituyen una subsucesión de s_n denotada $s_{n'}$. Lo mismo para los términos menores, que de ser infinitos denotamos por la subsucesión $s_{n''}$. Es claro de la definición de f que

$$f(s_{n'}) = \beta \to \beta \quad \text{si } n' \to \infty$$

y de la parte **(i)(a)**

$$f(s_{n''}) \to 0 \quad \text{si } n'' \to \infty.$$

Entonces f es continua en $x = a$ para $\beta = 0$. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**] (el hecho de no tomar una sucesión general, sino sólo dos convergentes por cada lado de $x = a$ y no justificar que esto es equivalente a tomar una general convergiendo por ambos lados a $x = a$ vale **0.25ptos**).

- **Opción límites laterales:** Para que f sea continua en $x = -a$ es necesario que

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \lim_{x \to -a^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \alpha$$

y

$$\lim_{x \to -a^+} f(x) = +\infty$$

pues $\lim\limits_{x \to -a^+} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = +\infty$ y $\exp(y) \to +\infty$ si $y \to +\infty$. Entonces f es no puede ser continua en $x = -a$ para ningún valor de α. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**].
Para que f sea continua en $x = b$ es necesario que

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = \beta$$

y

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = 0$$

pues $\lim_{x \to b^-} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = -\infty$ y $\exp(y) \to 0$ si $y \to -\infty$. Entonces f es continua en $x = b$ para $\beta = 0$. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**] (el hecho de mencionar en alguno de los dos puntos que f es continua ssi los límites laterales existen y son iguales vale **0.25ptos**).

P3.- Definimos la función en $\mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(i) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(iii) **Usando** el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1, 1[$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(iv) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.
Indicación: use nuevamente el T.V.I.

Pauta.- **(i)** Notemos que $e^x + e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de modo que el denominador de tanh no se anula jamás y resulta ser continua por ser de la forma f/g con f y g continuas (suma de continuas) y $g(x) \neq 0$ [**0/0.25/0.5pto**]. Por otro lado $\tanh(0) = (1-1)/(1+1) = 0$ y

$$e^{-x} + e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$$

$$e^x + e^x > 0 \Rightarrow -e^x < e^x \Rightarrow -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x}$$

de donde se obtiene $-1 < \tanh(x) < 1$ al dividir por $e^x + e^{-x} > 0$. [**0/0.25/0.5/0.75/1pto**].

(ii) Si $n \to \infty$ entonces $e^{-2n} \to 0$, de donde por álgebra de límites [**0/0.25/0.5/0.75pto**]:

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$ y y tomar $x = n$).

Del mismo modo [**0/0.25/0.5/0.75pto**]:

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} - e^{n}}{e^{-n} + e^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2n} + 1} = -1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ y tomar $x = -n$). También se puede deducir usando el límite precedente y argumentando que $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ (función impar).

(iii) Sea $0 < y < 1$, como $\tanh(n) \to 1$ y $\tanh(n) < 1$ (o bien como $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$), entonces para n suficientemente grande $y < \tanh(n) < 1$, esto es existe n_0 tal que $y < \tanh(n_0) < 1$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(0) < y < \tanh(n_0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (0, n_0)$ tal que $\tanh(x) = y$ [**0.7pto**].

Sea $-1 < y < 0$, como $\tanh(-n) \to -1$ y $-1 < \tanh(-n)$ (o bien como $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$), entonces para n suficientemente grande $-1 < \tanh(-n) < y$, esto es existe n_1 tal que $\tanh(-n_1) < y$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(-n_1) < y < \tanh(0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (-n_1, 0)$ tal que $\tanh(x) = y$ [**0.7pto**]. (También se puede argumentar usando la imparidad).

Si $y = 0$ claramente $\tanh(0) = y$ [**0/0.1pto**].

(iv) Como $\cos(2k\pi) = 1$ y $\cos((2k+1)\pi) = -1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\cos(2k\pi) - \tanh(2k\pi) > 0$ y $\cos((2k+1)\pi) - \tanh((2k+1)\pi) < 0$, esto es, la función continua $\cos(x) - \tanh(x)$ cambia de signo en cada intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. Usando el T.V.I., existe $x_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $\cos(x_k) - \tanh(x_k) = 0$, esto es $\cos(x_k) = \tanh(x_k)$ y por lo tanto $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ constituyen una sucesión de raíces reales distintas de la ecuación. [**1.5pto**].

Nota: los puntajes del tipo [**0/0.5/1pto**] significan que en lo posible la puntuación tomará solamente esos valores.

Atte, el Coordinador.

4. Problemas Resueltos

P1.- Calcular los siguientes límites

a) (i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a-x)-2\operatorname{sen}a}{x^2}$

b) (i) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$

c) (i) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x^2}{x^2-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$ $a,b>0$ (iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x-x\ln(e+\frac{1}{x})$

Solución.- *a*) (i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2}$. Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} &= \frac{1-2\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\\ &= \frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x-2\cos x+\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\\ &= \frac{2\cos x(\cos x-1)}{x^2} = -\frac{2\cos x(1-\cos x)}{x^2}\\ &= -\frac{4\cos x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{\cos x\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2},\end{aligned}$$

como $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$ y $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-2\cos x+\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0}-\cos x\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2} = -1.$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a-x)-2\operatorname{sen}a}{x^2}$. Desarrollando $\operatorname{sen}(a+x)$ y $\operatorname{sen}(a-x)$

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a-x)-2\operatorname{sen}a}{x^2} &= \frac{(\operatorname{sen}a\cos x+\operatorname{sen}x\cos a)+(\operatorname{sen}a\cos x-\operatorname{sen}x\cos a)-2\operatorname{sen}a}{x^2}\\ &= \frac{2\operatorname{sen}a\cos x-2\operatorname{sen}a}{x^2} = \frac{2\operatorname{sen}a(\cos x-1)}{x^2}\\ &= -\operatorname{sen}a\frac{\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2},\end{aligned}$$

luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a-x)-2\operatorname{sen}a}{x^2} = -\operatorname{sen}a.$$

b) (i) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$. Basta notar que $\operatorname{sen}3x=\operatorname{sen}x\cos 2x+\operatorname{sen}2x\cos x$ y $\operatorname{sen}2x=2\operatorname{sen}x\cos x$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} &= \lim_{x\to\pi}\frac{\operatorname{sen}x\cos 2x}{2\operatorname{sen}x\cos x}+\frac{\operatorname{sen}2x\cos x}{\operatorname{sen}2x}\\ &= \lim_{x\to\pi}\frac{\cos 2x}{2\cos x}+\lim_{x\to\pi}\cos x\\ &= -\frac{1}{2}-1=-\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}$. Es directo de la igualdad

$$\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x} = \frac{\frac{3\operatorname{sen}3x}{3x}}{\frac{2\operatorname{sen}2x}{2x}},$$

luego $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}2x}=\frac{3}{2}$.

c) (i) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1}$. Es directo del hecho que $\frac{\ln x}{x-1} \to 1$ cuando $x \to 1$, otra alternativa es realizar el cambio de variables $y = \ln x^2$ luego $\frac{\ln x}{x-1} = \frac{y}{e^y-1}$, luego

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to 0} \frac{y}{e^y-1},$$

y como $\lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$ se obtiene que $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x^2}{x^2-1} = 1$.

(ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ $a, b > 0$. Notemos que $a^x = \exp(x \ln a)$ y $b^x = \exp(x \ln b)$ utilizando el hecho que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{a^x-b^x}{x} &= \frac{a^x-1-(b^x-1)}{x} = \frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x} \\ &= \ln a \frac{\exp(x\ln a)-1}{x \ln a} - \ln b \frac{\exp(x \ln b)-1}{x \ln b} \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} x - x\ln(e + \frac{1}{x})$. Desarrollando

$$\begin{aligned} x - x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right) &= x \ln e - x \ln\left(e+\frac{1}{x}\right) = -x\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right) \\ &= -\frac{1}{e}\ln\left(1+\frac{1}{ex}\right)^{ex} \end{aligned}$$

como la función ln es continua se obtiene que $\lim\limits_{x\to\infty} x - x\ln(e+\frac{1}{x}) = -\frac{1}{e}$.

P2.- Se sabe que la función f indicada, es continua en todo su dominio. Especificar cual es el dominio y calcular cual es el valor de k

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} & x \neq 0 \\ k & x = 0. \end{cases}$$

Solución.- El dominio de f está dado por

$$\mathrm{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 9x + 4 \geq 0\} \cup \{0\},$$

pero $2x^2 + 9x + 4 \geq 0$ si y sólo si $x \in]-\infty, -4] \cup [-\frac{1}{2}, \infty[$ luego $\mathrm{Dom}(f) =]-\infty,-4] \cup [-\frac{1}{2}, \infty[$. Para que f sea continua en su dominio necesitamos que $k = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x}$. Racionalizando

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} &= \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}+2}{\sqrt{2x^2+9x+4}+2} \\ &= \frac{2x^2+9x+4-4}{x(\sqrt{2x^2+9x+4}+2)} \\ &= \frac{2x+9}{\sqrt{2x^2+9x+4}+2}, \end{aligned}$$

luego $k = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2x^2+9x+4}-2}{x} = \frac{9}{4}$.

P3.- a) Demostrar que la ecuación $\exp(x)\cos(x) + 1 = 0$ tiene infinitas raíces reales.
Indicación: Considerar intervalos de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ para aplicar el teorema del valor intermedio.

b) Sean $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x) < g(x) \forall x \in [a,b]$. Demostrar que existe un real $k > 0$ tal que $f(x) + k < g(x) \forall x \in [a,b]$.

c) muestre que la función $f(x) = \sqrt{3x+5} - x^2$ es uniformemente continua en el intervalo $[\frac{2}{3}, 5]$.

Solución.- *a*) Consideremos un intervalo de la forma $[k\pi, (k+1)\pi]$ donde k es par y $k \geq 2$. Es claro que la función definida por $h(x) = \exp(x)\cos(x) + 1$ es continua en $\mathbb{R}$. Además, se cumple que $h(k\pi) > 0$ y $h((k+1)\pi) < 0$, por lo tanto aplicando el *Teorema del valor intermedio* se tiene que h debe anularse al menos una vez en el intervalo $[k\pi, (k+1)\pi]$, como hay infinitos intervalos de esta forma se concluye que h posee infinitas raices reales.

b) Para $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas definamos $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ como $h(x) = g(x) - f(x)$ es claro que h es continua y esta definida sobre un intervalo cerrado y acotado ($[a,b]$), del *Teorema de Weierstrass* sabemos que h alcanza su máximo y mínimo en $[a,b]$. Sea $\bar{x} \in [a,b]$ que minimiza h, esto es, $h(\bar{x}) \leq h(x)\ \forall x \in [a,b]$. Es claro, de las hipótesis del problema, que $h(\bar{x}) > 0$; definamos $k = \frac{h(\bar{x})}{2} > 0$ se cumple

$$0 < k < h(\bar{x}) < h(x) \quad \forall x \in [a,b],$$

esto es, $k < g(x) - f(x)\ \forall x \in [a,b]$. de donde concluimos.

c) Dado que f es continua en el intervalo $[\frac{2}{3}, 5]$ y este es cerrado y acotado se concluye que f es uniformemente continua en $[\frac{2}{3}, 5]$.