

Auxiliar #7 MA12A

Miguel Angel Carrasco.

1 (Primitivas o Antiderivadas)

Definición 1.1 Sean $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $I \subseteq A$ un intervalo. Diremos que la función $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en I ssi

1. F es continua en I y diferenciable en $\text{Int}(I)$.
2. $\forall x \in \text{Int}(I)$, $F'(x) = f(x)$.

1.1 Tabla de primitivas elementales

- | | | |
|--|---|---|
| $\bullet \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $\bullet \int \csc^2(ax) = -\frac{1}{a} \cot(ax) + C$ | $\bullet \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$ |
| $\bullet \int \frac{1}{x} = \ln x + C$ | $\bullet \int e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax} + C$ | $\bullet \int \frac{1}{1-x^2} = \arg \tanh(x) + C$ |
| $\bullet \int \sin(ax) = -\frac{1}{a} \cos(ax) + C$ | $\bullet \int \sinh(ax) = \frac{1}{a} \cosh(ax) + C$ | $\bullet \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \arg \cosh(x) + C$ |
| $\bullet \int \cos(ax) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C$ | $\bullet \int \cosh(ax) = \frac{1}{a} \sinh(ax) + C$ | $\bullet \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arg \sinh(x) + C$ |
| $\bullet \int \tan(ax) = -\frac{1}{a} \ln \cos(ax) + C$ | $\bullet \int \frac{1}{1+x^2} = \arctan(x) + C$ | $\bullet \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C$ |
| $\bullet \int \sec^2(ax) = \frac{1}{a} \tan(ax) + C$ | $\bullet \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + C$ | |

1.2 Propiedades

1. $\int (f + g) = \int f + \int g$
2. $\int (\lambda f) = \lambda \int f$
3. $\int f(u) = \int (f \circ g) \cdot g'(x) + C$ Fórmula del cambio de variables
4. $\int f' \cdot g = f \cdot g - \int g' \cdot f$ Fórmula de integración por partes

2 Problemas

P1. Calcule las siguientes primitivas

1. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$
2. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$
3. $\int (ax+b)^n$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}$
5. $\int \frac{1}{x^2+2x-3}$

P2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

$$(1+x^2)y' = xy \quad (1)$$

$$x^2(yy'' + y'^2) = 1 \quad (2)$$

$$y' = xy \quad (3)$$

P3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y que cumple lo siguiente:

$$f'(x) + P(x)f(x) = Q(x) \quad (4)$$

La idea es encontrar que tipo de funciones satisfacen (4). Para esto proceda como sigue

1. Resuelva la siguiente ecuación

$$z'(x) + P(x)z(x) = 0 \quad (5)$$

2. Considere (4) y (5) demuestre que

$$f \cdot z = \int z(x)Q(x)dx + C_1 \quad (C_1 = \text{constante})$$

Ind: recuerde que $f'z + z'f = (fz)'$

3. Concluya

P4. Sea $A(x)$ el área entre a y x de una función integrable ($f(x)$).

Calcule cuanto vale la derivada de $A(x)$.

Cuanto vale el área bajo la curva entre $[a, b]$.

(Nota: primitiva de f es $F(x) + C$).

3 Soluciones

P1. Calcule las siguientes primitivas

1. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$
2. $\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$
3. $\int (ax+b)^n$
4. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}$
5. $\int \frac{1}{x^2+2x-3}$

Sol:

1. Sea $u = \cos x \Rightarrow u' = -\operatorname{sen} x$ luego

$$I = \int \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x} = - \int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$$

por teorema de cambio de variable

$$I = - \left(\int \frac{1}{1+u^2(x)} \right)_{u=\cos x} = -\arctan u = -\arctan(\cos x) + C$$

- 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} &= \int e^{u(x)} u'(x) \\ &= \left(\int e^u \right)_{u=\arctan x} \\ &= e^{\arctan x} + C \end{aligned}$$

3. Tomando $u = ax+b$ luego

$$\begin{aligned} I = \int (ax+b)^n &= \int \frac{(u(x))^n}{a} u'(x) \\ &= \frac{1}{a} \left(\int u^n \right)_{u=ax+b} \\ &= \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C \end{aligned}$$

4. Utilizando el teorema de cambio de variables

$$\begin{aligned} I = \int \frac{f'(x)}{f(x)} &= \left(\int \frac{1}{f} \right)_{f=f(x)} \\ &= \ln(f(x)) + C \end{aligned}$$

5. $\int \frac{1}{x^2+2x-3}$ notando que $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ luego

$$\frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A}{(x + 3)} + \frac{B}{(x - 1)}$$

Donde $A = -\frac{1}{4}$ y $B = \frac{1}{4}$ luego

$$\int \frac{1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{1}{4} \left(-\int \frac{1}{(x + 3)} + \int \frac{1}{(x - 1)} \right) = \frac{1}{4} (-\ln(x + 3) + \ln(x - 1)) + C$$

P2. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $(1 + x^2)y' = xy$
2. $x^2(yy'' + y'^2) = 1$
3. $y' = xy$

Sol:

1. $(1 + x^2)y' = xy$

$$(1 + x^2)y' = xy \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{(1 + x^2)}$$

Ahora integrando se obtiene

$$\int \frac{y'}{y} = \int \frac{x}{(1 + x^2)} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \ln(C)$$

finalmente se obtiene

$$y = C\sqrt{1 + x^2}$$

2. $x^2(yy'' + y'^2) = 1$

$$(yy'' + y'^2) = \frac{1}{x^2}$$

notemos que $(yy')' = (yy'' + y'^2)$, integrando se obtiene

$$yy' = -\frac{1}{x} + C_1$$

integrando nuevamente, notando que $yy' = (\frac{y^2}{2})'$

$$y^2 = -2\ln(x) + C_1x + C_2$$

3. $y' = xy$

$$y' = xy \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = x$$

integrando

$$\ln y = \frac{x^2}{2} + C \iff y = C_0 e^{\frac{x^2}{2}}$$

P3. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable y que cumple lo siguiente:

$$f'(x) + P(x)f(x) = Q(x) \quad (6)$$

La idea es encontrar que tipo de funciones satisfacen (6). Para esto proceda como sigue

1. Resuelva la siguiente ecuación

$$z'(x) + P(x)z(x) = 0 \quad (7)$$

2. Considere (6) y (7) demuestre que

$$f \cdot z = \int z(x)Q(x)dx + C_1 \quad (C_1 = \text{constante})$$

Ind: recuerde que $f'z + z'f = (fz)'$

3. Concluya

Sol:

1. (7) es equivalente a $\frac{z'(x)}{z(x)} = -P(x)$ integrando

$$\int \frac{z'(x)}{z(x)} = - \int P(x)$$

la solución de esta ecuación es

$$z(x) = C_0 e^{-\int P(x)}$$

2. Considerando el sistema

$$\begin{array}{l|l} f'(x) + P(x)f(x) = Q(x) & \cdot z \\ z'(x) + P(x)z(x) = 0 & \cdot f \end{array}$$

ahora sumando (6) $\cdot z$ con (7) $\cdot f$ se obtiene

$$f'(x)z(x) + z(x)'f(x) = z(x)Q(x)$$

notando que $f'z + z'f = (fz)'$ e integrando

$$\int (f(x)z(x))' = \int z(x)Q(x) + C_1$$

como $\int (f(x)z(x))' = f(x)z(x)$ reemplazando esto en lo anterior se tiene el resultado pedido

3. Utilizando las partes anteriores se concluye que

$$\begin{aligned} f(x) &= C_0 e^{\int P(x)} \left\{ \left(\int z(x)Q(x) \right) + C_1 \right\} \\ &= C_0 e^{\int P(x)} \left\{ \left(\int e^{-\int P(x)} Q(x) \right) + C_1 \right\} \end{aligned}$$

P4. Sea $A(x)$ el área entre a y x de una función integrable ($f(x)$).

Calcule cuanto vale la derivada de $A(x)$.

Cuanto vale el área bajo la curva entre $[a, b]$.

(Nota: primitiva de f es $F(x) + C$).

Sol: Derivada de $A(x)$

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$$

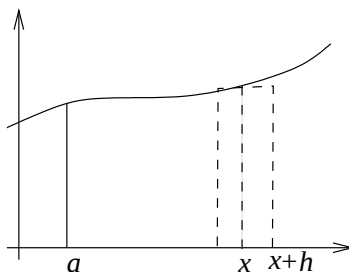


Figura 1:

$$A'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)h}{h} = f(x)$$

luego $A(x)$ es primitiva de f .

El área entre a y b se calcula haciendo $x = b$, $A(b) = F(b) + C$ ¿cuanto vale C ? claramente el área entre a y a es cero $A(a) = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$ por lo tanto

$$A(b) = F(b) - F(a)$$

4 Problemas Propuestos

- Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 . Calcular el trabajo necesario para mover la segunda partícula sobre una recta desde la distancia r_1 a la distancia $r_2 > r_1$ de la primera partícula.

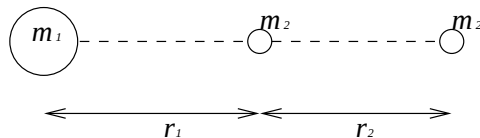


Figura 2:

- Calcule $\int \csc x \, dx$ para esto proceda como sigue
 1. Muestre que $\frac{1}{\sin x} = \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})}{2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2})}$
 2. Utilizando lo anterior calcule $\int \csc x \, dx$ recuerde que $\int (f + g) = \int f + \int g$
- Sea $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función biyectiva diferenciable y tq. $g(0) = 0$ sea $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1[$ una función diferenciable

$$g(x) = \int_0^{g(x)} f^2(g^{-1}(x)) dx + f(x)$$

1. Pruebe que $f(x) = \tanh(g(x))$
2. Calcule la integral

$$\int_0^{x^3} (\tanh(t))^2 dt$$