CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

AUX 5, JUEVES 29 DE AGOSTO

Problema 0. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = (1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2})e^{1/x}$$

para ello prosiga como sigue.

i. Analice el Dominio de f y su signo.
ii. Estudie la existencia de asíntotas.
iii. Calcule f' y estudie el creciemiento de f. Analice la existencia de mínimos y ma'ximos.
iv. Calcule f'' y estudie la convexidad de f. Analice puntos de inflexión.
v. Bosqueje f.

Problema 1. Estudie completamente la siguiente función:

$$f(x) = x + 1 - \frac{2}{x} - \frac{3\ln(x)}{x}$$

para ello prosiga como sigue.

i. Analice el Dominio de f y encuentre un cero por inspección.
ii. Estudie la existencia de asíntotas.
iii. Calcule f' y estudie el creciemiento de f. Analice la existencia de mínimos y ma'ximos.
iv. Calcule f'' y estudie la convexidad de f. Analice puntos de inflexión.
v. Bosqueje f.

Problema 2. Considere la función f definida en $(-1, \infty)$ por:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - \ln(1+x)$$

i. Calcule f' y estudie el creciemiento de f. Analice la existencia de mínimos y ma'ximos.
ii. Calcule f'' y estudie la convexidad de f. Analice puntos de inflexión.
iii. Calcular $l = \text{lím}_{x \to -1^+} f(x)$ y $L = \text{lím}_{x \to +\infty} f(x)$.
iv. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones.

Solución:

Problema 0. Tenemos los siguiente:

i. Es claro que la función está bien definida en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Más aún, podemos asegurar que es continua en ese conjunto pues es suma, producto y composición de funciones de ese tipo.

   Para calcular los signos de f, primero recordemos que la función exponencial es estrictamente positiva. Si agrupamos correctamente el paréntesis de la izquierda nos queda:

   $$1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-x+2}{x^2}$$

   Ahora, el polinomio x^2-x+2 no tiene raíces reales (de hecho sus raíces son $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$ y $\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$), por lo que no tiene cambios de signo; y como en $x=0$ vale 2, deducimos que el numerador siempre es positivo. Lo mismo se puede argumentar respecto de x^2.

   Deducimos que la función es estrictamente positiva en su dominio.

ii. Analicemos las asíntotas por separado:

   (a) **Asíntotas Horizontales:**

   Debemos analizar que sucede con la función cuando hacemos $x\to+\infty$ y cuando $x\to-\infty$. En nuestro caso se tiene:

   $$lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{1/x}=lim_{x\to+\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})=1$$
   $$lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{1/x}=lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})=1$$

   Notemos que la primera igualdad viene del hecho que $lim_{x\to\pm\infty}e^{1/x}=e^{lim_{x\to\pm\infty}1/x}=e^0=1$.

   Concluimos que hay asíntotas horizontales en $y=1$ cuando $x\to\pm\infty$.

   (b) **Asíntotas Verticales:**

   Debemos analizar que sucede en los puntos donde la función no está definida (esto pues son los únicos donde la función puede tener asíntotas de este tipo). Por esto es que tenemos que estudiar $f(x)$ cuando $x\to0^+$ y $x\to0^-$.

   Antes de continuar recordemos que la exponencial tiene un crecimiento mucho mayor a los polinomios, y además que $lim_{x\to0^+}e^{1/x}=\infty$ y $lim_{x\to0^-}e^{1/x}=0$, con esto los límites que queríamos calcular son:

   $$lim_{x\to0^+}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{1/x}=\infty$$
   $$lim_{x\to0^-}(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{1/x}=0$$

   luego hay una asíntota vertical en $x=0$ cuando $x\to0^+$.

   (c) **Asíntotas Oblícuas:**

   Como ya vimos que hay asíntotas horizontales, en particular la recta $x=1$ es también la única posible asíntota oblícua.

iii. Calculemos, por álgebra de derivadas, f':

$$f'(x)=(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})'e^{1/x}+(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})(e^{1/x})'$$
$$f'(x)=(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3})e^{1/x}+(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})e^{1/x}(-\frac{1}{x^2})$$
$$f'(x)=(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^4})e^{1/x}$$
$$f'(x)=(-\frac{3}{x^3}-\frac{2}{x^4})e^{1/x}$$
$$f'(x)=-\frac{1}{x^4}(3x+2)e^{1/x}$$
$$f'(x)=-\frac{3x+2}{x^4}e^{1/x}$$

Directamente encontramos un punto crítico en $x=-\frac{2}{3}$. Los signos de $f'(x)$ están en la siguiente tabla:

	$(-\infty,-\frac{2}{3})$	$(-\frac{2}{3},+\infty)$
$-(x+2)$	$(+)$	$(-)$
$e^{1/x}$	$(+)$	$(+)$
x^4	$(+)$	$(+)$
$f'(x)$	$(+)$	$(-)$

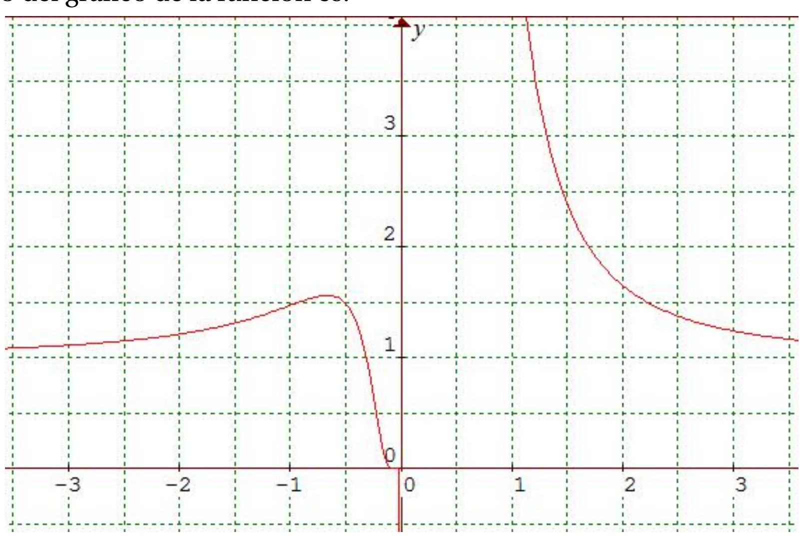
concluímos que f es creciente en $(-\infty,-\frac{2}{3})$ y decreciente en $(-\frac{2}{3},\infty)$, por lo que $x=-\frac{2}{3}$ es un máximo local.

iv. Nuevamente, por álgebra de derivadas, f'':

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= (-\tfrac{3x+2}{x^4})'e^{1/x} - \tfrac{3x+2}{x^4}(e^{1/x})' \\
f''(x) &= (-\tfrac{3x^4-4x^3(3x+2)}{x^8})e^{1/x} + \tfrac{3x+2}{x^4}e^{1/x}\tfrac{1}{x^2} \\
f''(x) &= (\tfrac{-3x^4+12x^4+8x^3}{x^8} + \tfrac{3x+2}{x^6})e^{1/x} \\
f''(x) &= \tfrac{1}{x^8}(9x^4+8x^3+3x^3+2x^2)e^{1/x} \\
f''(x) &= \tfrac{9x^2+11x+2}{x^6}e^{1/x} \\
f''(x) &= \tfrac{(x+1)(x+\frac{2}{9})}{x^6}e^{1/x}
\end{aligned}
$$

Se tiene que los puntos de inflexión son $x=-1$ y $x=-\frac{2}{9}$. De modo similar a la tabla que obtuvimos en iii. se deduce que la curva es cóncava en $(-1,-\frac{2}{9})$ y convexa en $(-\infty,-1)\cup(-\frac{2}{9},+\infty)$.

v. El bosquejo del gráfico de la función es:



Problema 1. Recordemos que vamos a analizar la función:

$$f(x)=x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x}$$

i. En este caso el Dominio de f será el menor de los dominios de las funciones que la componen, lo cual es $(0,+\infty)$; del mismo modo que antes la función es continua en este intervalo. Para encontrar un cero de f basta que notemos que $f(1)=1+1-\frac{2}{1}-\frac{3ln(1)}{1}=0$.

ii. Para las asíntotas hacemos lo típico:

(a) **Asíntotas Horizontales:**
Debemos analizar que sucede con la función cuando hacemos $x\rightarrow+\infty$, esto es:
$$lim_{x\rightarrow+\infty}x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x}=+\infty$$
Luego no hay asíntotas horizontales.

(b) **Asíntotas Verticales:**
Basta que estudiemos $f(x)$ cuando $x\rightarrow 0^+$.
$$lim_{x\rightarrow 0^+}x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x}=lim_{x\rightarrow 0^+}1-\frac{2+3ln(x)}{x}=+\infty$$
luego hay una asíntota vertical en $x=0$ cuando $x\rightarrow 0^+$.

(c) **Asíntotas Oblícuas:**
Notemos que si $x\rightarrow+\infty$ entonces la función comienza a comportarse como $x+1$, esto lo podemos formalizar con:
$$m=lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{1}{x}(x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x})=lim_{x\rightarrow+\infty}\frac{x+1}{x}=1$$
$$n=lim_{x\rightarrow+\infty}x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x}-x=lim_{x\rightarrow+\infty}1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x}=1$$

iii. La primera derivada viene dada por:

$$f'(x)=(x+1-\frac{2}{x}-\frac{3ln(x)}{x})'$$
$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-(\frac{3ln(x)}{x})'$$
$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}-\frac{3-3ln(x)}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{x^2+2-3(1-ln(x))}{x^2}$$
$$f'(x)=\frac{x^2-1+3ln(x)}{x^2}$$

Es claro que en $x=1$ la derivada se anula, luego éste es un punto crítico. En $(0,1)$ la derivada es negativa, luego la función es decreciente; del mismo modo en $(1,+\infty)$ la derivada es positiva, y así la función será creciente

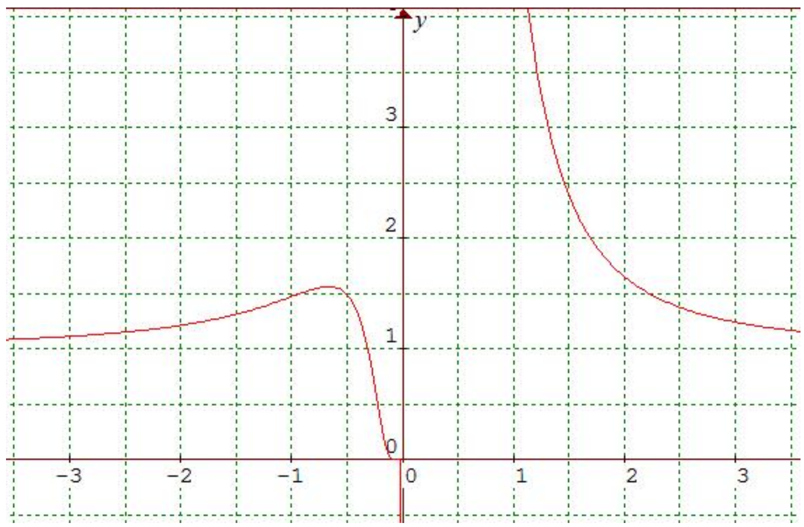
$$\therefore \qquad x=1 \text{ es un mínimo local.}$$

iv. Segunda derivada:

$$f''(x)=(\frac{x^2-1+3ln(x)}{x^2})'$$
$$f''(x)=\frac{(x^2-1+3ln(x))'(x^2)-2x(x^2-1+3ln(x))}{x^4}$$
$$f''(x)=\frac{(2x+\frac{3}{x})(x^2)-2x^3+2x-6xln(x))}{x^4}$$
$$f''(x)=\frac{2x^3+3x-2x^3+2x-6xln(x))}{x^4}$$
$$f''(x)=\frac{5-6ln(x))}{x^3}$$

Concluímos que hay un punto de inflexión en $x=e^{\frac{5}{6}}$, además que al ser $f''>0$ en $(0,\frac{5}{6})$ la función es concava en ese intervalo; por otro lado $f'' < 0$ en $(\frac{5}{6}, \infty)$ con lo que deducimos que allí la función es convexa.

v. El bosquejo de f queda:



Problema 2. Finalmente trabajaremos con $f:(-1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x} - ln(1+x).$$

i. Tenemos que f' es:

$$f'(x) = (\frac{2x}{1+x})' - (ln(1+x))'$$
$$f'(x) = \frac{2(1+x)-2x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$
$$f'(x) = \frac{2+2x-2x-(1+x)}{(1+x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2}$$

Es claro que hay un punto crítico en $x = 1$. Si analizamos los signos de la derivada tenemos que $f' > 0$ en $(-1,1)$ y que $f' < 0$ en $(1,+\infty)$, luego la función es creciente en el primer intervalo y decreciente en el segundo; y así concluímos que $x = 1$ es un máximo local.

ii. Por álgebra de derivadas:

$$f''(x) = (\frac{1-x}{(1+x)^2})'$$
$$f''(x) = \frac{-(1+x)^2-2(1+x)(1-x)}{(1+x)^4}$$
$$f''(x) = \frac{-1-x^2-2x-2(1-x^2)}{(1+x)^4}$$
$$f''(x) = \frac{-1-x^2-2x-2+2x^2)}{(1+x)^4}$$
$$f''(x) = \frac{x^2-2x-3)}{(1+x)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(x-3)(x+1))}{(1+x)^4}$$
$$f''(x) = \frac{(x-3)}{(1+x)^3}$$

El único punto de inflexión es en $x = 3$. Para ver la convexidad debemos hacer la tabla con los signos de f''

	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$(x-3)$	$(-)$	$(+)$
$(1+x)^3$	$(+)$	$(+)$
$f''(x)$	$(-)$	$(+)$

Luego la función es cóncava en $(-1,3)$ y convexa en $(3,+\infty)$.

iii. Para el primer límite veamos que:

$$ln(1+x) > 1 - \frac{1}{x+1} \text{ si } x > -1$$

luego $\frac{2x}{1+x} - ln(1+x) < \frac{2x}{1+x} - (1 - \frac{1}{x+1})$ y con esto queda:

$$f(x) < \frac{2x}{1+x} - 1 + \frac{1}{x+1}$$
$$f(x) < \frac{2x+1-(x+1)}{1+x}$$
$$f(x) < \frac{x}{1+x}$$

lo cual tiende a $-\infty$ si $x \rightarrow -1^+$ por lo que necesariamente $l = lim_{x\rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$.

Por otro lado:

$$L = lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x} - ln(1+x)$$
$$L = 2 - lim_{x\to+\infty} ln(1+x)$$
$$L = -\infty$$

iv. Notemos que $f(1) = \frac{2}{1+1} - ln(1+1) = 1 - ln(2) > 0$.
De las partes anteriores tenemos que la función es estrictamente creciente en el intervalo $(-1,1)$ y que $l = -\infty$. En particular podemos asegurar la existencia de un $m \in (-1,1)$ tal que $f(m) < 0$; como la función es continua en $[m,1]$ por uno de los Corolarios del Teorema del Valor Intermedio existe un $c_1 \in (m,1)$ tal que $f(c_1) = 0$ y como es estrictamente creciente este valor es único en $(-1,1)$.
De un razonamiento similar deducimos que existe un único $c_2 \in (1,+\infty)$ tal que $f(c_2) = 0$ y por lo tanto la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones.