Universidad de Chile
Departamento de Ingeniería Matemática
MA110 Introducción al Álgebra

Auxiliar 7
Cardinalidad

Profesor: Leonardo Sánchez C.
Profesor Aux.: Hernán Figueroa V.

P1.

(a) Sea A un conjunto no numerable, y sea $B \subseteq A$ un conjunto numerable. Pruebe que el conjunto $A \backslash B$ es no numerable.

(b) Demuestre, usando lo anterior, que el conjunto $\mathbb{I}$ de los números irracionales es no numerable.

(c) Sea B un conjunto infinito numerable y $\leq$ una relación de orden total definida en B. Pruebe que dado $a \in B$ uno de los dos conjuntos es infinito numerable:

$$B_1 = \{b \in B | b \leq a\}, B_1 = \{b \in B | a \leq b\}.$$

P2.

(a) Demostrar que el conjunto de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable.

(b) Demostrar que el conjunto potencia de $\mathbb{N}$,$2^{\mathbb{N}}$, no es numerable.

(c) Sea A un conjunto infinito y $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$ una función tal que:

$$(\forall n, n \in \mathbb{N}), f^{-1}[\{n\}] \text{ es finito o numerable.}$$

Demuestre que A es finito o numerable.

P3.

(a) Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las circunferencias en plano cartesiano cuyos centros tienen coordenadas racionales y su radio es racional, es decir $C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow C$ es una circunferencia de centro (a, b) y radio r con $a, b, r \in \mathbb{Q}$.

Pruebe que el conjunto de todos los pares de puntos (P, Q) donde P y Q son los extremos de los diámetros horizontales de las circunferencias de $\mathcal{C}$, es infinito numerable.

(b) Sea $E = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \{-1, 1\}^n \,|n \in \mathbb{N}, n \geq 2, \sum_{i=1}^{n} a_i = 0\}$.

Demuestre que E es infinito numerable.