IQ57A: Dinámica y control de procesos

Capítulo 9: Control Feedback

J. Cristian Salgado H.

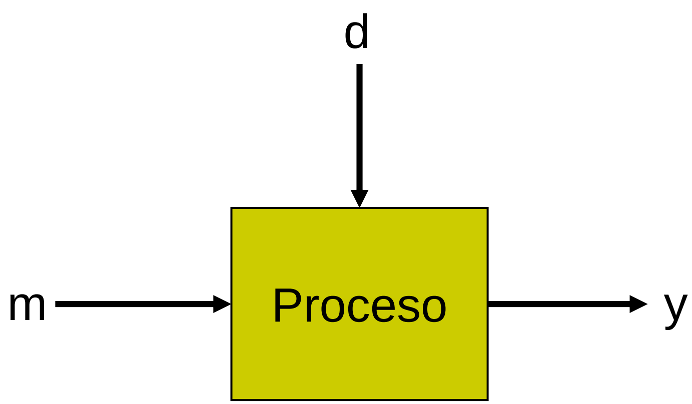
Propósito

Al final de esta clase usted será capaz de

- Identificar un lazo cerrado de control Feedback
- Entender los problemas de servo control y de regulación
- Conocer las características los controladores básicos: P, PI y PID
- Analizar la respuesta de un lazo cerrado utilizando el criterio de ubicación de polos y la matriz de Routh.

Control Feedback

Considere un sistema en modelo de entrada y salida



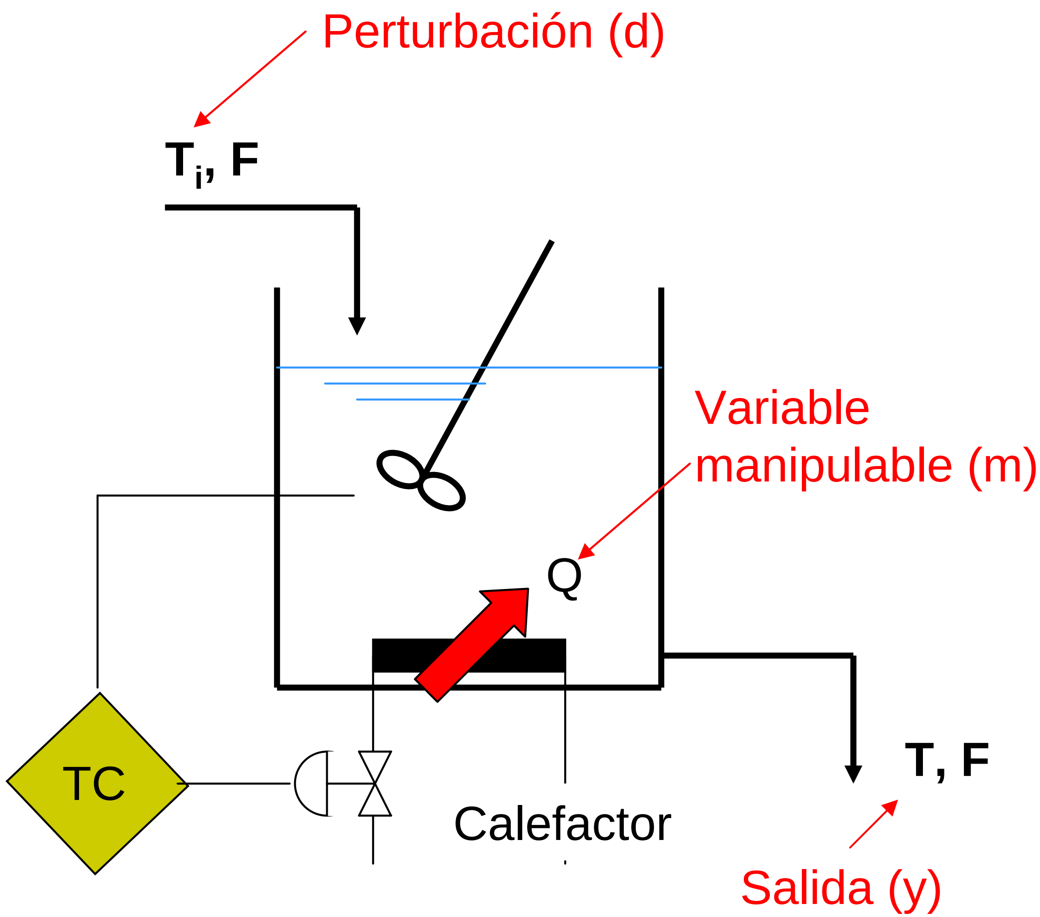
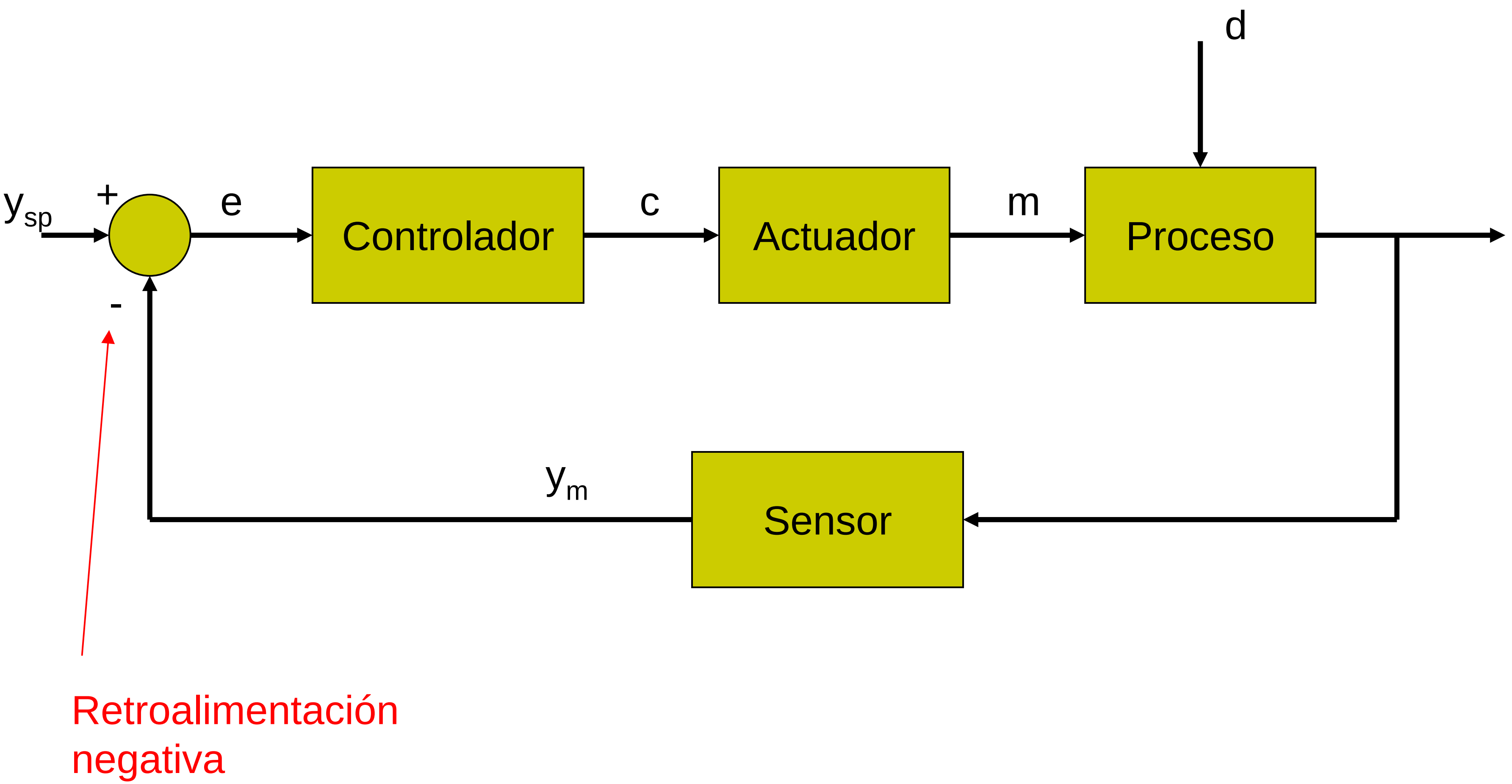
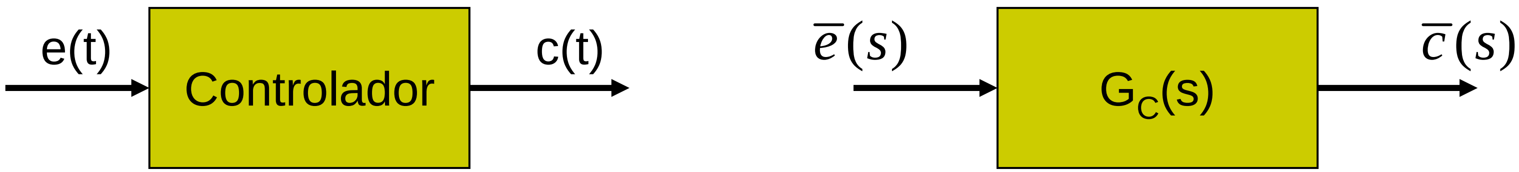


Diagrama de bloques de un sistema en lazo cerrado



Tipos de controladores



Tipos básicos de controlador

- Proporcional (P)
- Proporcional Integral (PI)
- Proporcional Integral Derivativo (PID)

Controlador proporcional (P)

La señal de salida es proporcional a
la entrada **e (error)**

$$c(t) = K_C \cdot e(t) + C_S$$

Los controladores P son descritos por la ganancia del controlador K_C o por su banda proporcional PB = 100/K_C

$$G_C(s) = \frac{\overline{c}(s)}{\overline{e}(s)} = K_C$$

Controlador proporcional Integral (PI)

$$c(t) = K_C \cdot e(t) + \frac{K_C}{\tau_I}\int_0^t e(t)dt + C_s$$

Constante de tiempo integral
o reset time

Un controlador PI puede eliminar errores pequeños en la entrada pero si el error no es eliminado rápidamente la acción del controlador aumentará hasta saturar su salida.

$$G_C(s) = \frac{\overline{c}(s)}{\overline{e}(s)} = K_C\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Controlador proporcional Integral Derivativo (PID)

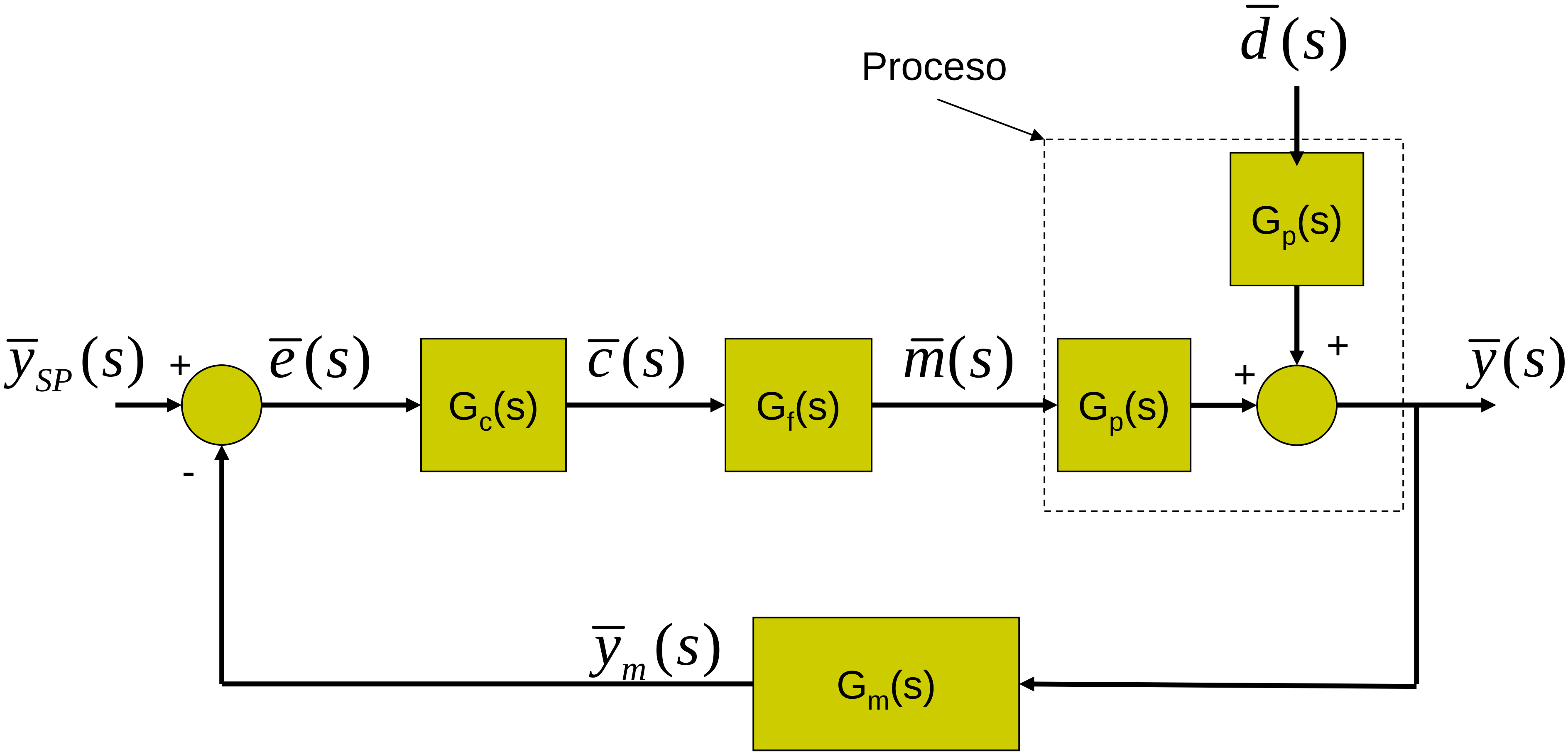
$$c(t) = K_C \cdot e(t) + \frac{K_C}{\tau_I}\int_0^t e(t)dt + K_C \tau_D \frac{de}{dt} + C_S$$

Constante de tiempo derivativo

El término derivativo anticipa la señal de error (la estima en función de la derivada) y genera una señal proporcional a la tasa de cambio del error. Desventajas en el caso de e constante o ruidoso

$$G_C(s) = \frac{\overline{c}(s)}{\overline{e}(s)} = K_C\left(1 + \frac{1}{\tau_I s} + \tau_D s\right)$$

Respuesta en un lazo cerrado



Respuesta en un lazo cerrado

$$\bar{y}(s) = \underbrace{\frac{G_P G_f G_C}{1 + G_P G_f G_C G_m}}_{G_{SP}} \bar{y}_{SP} + \underbrace{\frac{G_d}{1 + G_P G_f G_C G_m}}_{G_{load}} \bar{d}$$

Función de transferencia para el problema servo

$$\bar{d}(s) = 0$$

Función de transferencia para el problema de regulación

$$\bar{y}_{SP}(s) = 0$$

Efecto de un controlador P en un sistema de primer orden

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_P}{\tau'_P s + 1}\bar{y}_{SP} + \frac{K'_d}{\tau'_P s + 1}\bar{d}$$

Suponiendo Gm = Gf = 1

$$K'_P = \frac{K_P K_C}{1 + K_P K_C}, \qquad K'_d = \frac{K_d}{1 + K_P K_C}, \qquad \tau_P = \frac{\tau_P}{1 + K_P K_C}$$

- Se mantiene el orden del sistema
- La constante de tiempo se reduce
- La ganancia estática decrece
- Offset en regulación y en servo control

Efecto de un controlador P en un sistema de segundo orden

$$\bar{y}(s) = \frac{K'_P}{\tau'^2 s^2 + 2\zeta'\tau' s + 1}\bar{y}_{SP}$$

Suponiendo Gm = Gf = 1

$$K'_P = \frac{K_P K_C}{1 + K_P K_C}, \qquad \zeta' = \frac{\zeta}{\sqrt{1 + K_P K_C}}, \qquad \tau' = \frac{\tau_P}{\sqrt{1 + K_P K_C}}$$

- Se mantiene el orden del sistema
- La ganancia estática decrece
- El factor de amortiguación y el periodo de oscilación decrecen

(un sistema sobre amortiguado puede volverse subamortiguado)

- Aumento de Kc entonces sistema más rápido, con más overshoot y mayor decay ratio

Efecto de un controlador I en un sistema de primer orden

$$\bar{y}(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}\bar{y}_{SP}$$

Suponiendo Gm = Gf = 1

$$K'_P = 1, \qquad \zeta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau_I}{\tau_P K_P K_C}}, \qquad \tau = \sqrt{\frac{\tau_I \tau_P}{K_P K_C}}$$

- Aumenta el orden del sistema
- La respuesta puede ser más lenta que un sistema de primer orden
- Ganancia = 1, luego el offset es 0.
- Alto Kc provoca respuesta más rápida pero puede hacer oscilar el sistema (overshoot aumenta)

Efecto de un controlador D en un sistema de primer orden

Suponiendo Gm = Gf = 1

$$\bar{y}(s) = \frac{K_P K_C \tau_D s}{\left(\tau_P + K_P K_C \tau_D\right) s + 1} \bar{y}_{SP}$$

- El orden se mantiene
- Mientras más alta la constante derivativa más lenta la respuesta
- En sistema de alto orden eso provoca estabilización de la respuesta

Efecto de un controlador PI y PID en un sistema de primer orden

PI

- Orden del sistema crece
- Offset es eliminado (acción integral)
- Aumento en K_C provoca sistemas con respuesta más rápida pero oscilatoria (aumenta el overshoot)

PID

- Sistema se estabiliza
- Se puede aumentar KC sin aumentar demasiado el overshoot

Análisis de estabilidad de sistemas feedback

Definición: Un sistema es considerado estable si para toda entrada acotada produce una respuesta acotada independiente del estado inicial

La estabilidad de un sistema en lazo cerrado está definida por la ubicación de los polos de su función de transferencia

$$\bar{y}(s) = \frac{G_P G_f G_C}{1 + G_P G_f G_C G_m}\bar{y}_{SP} + \frac{G_d}{1 + G_P G_f G_C G_m}\bar{d}$$

Ecuación característica

Criterio de estabilidad de Routh

Se puede aplicar a sistemas que se pueden representar por un cuociente de polinomios

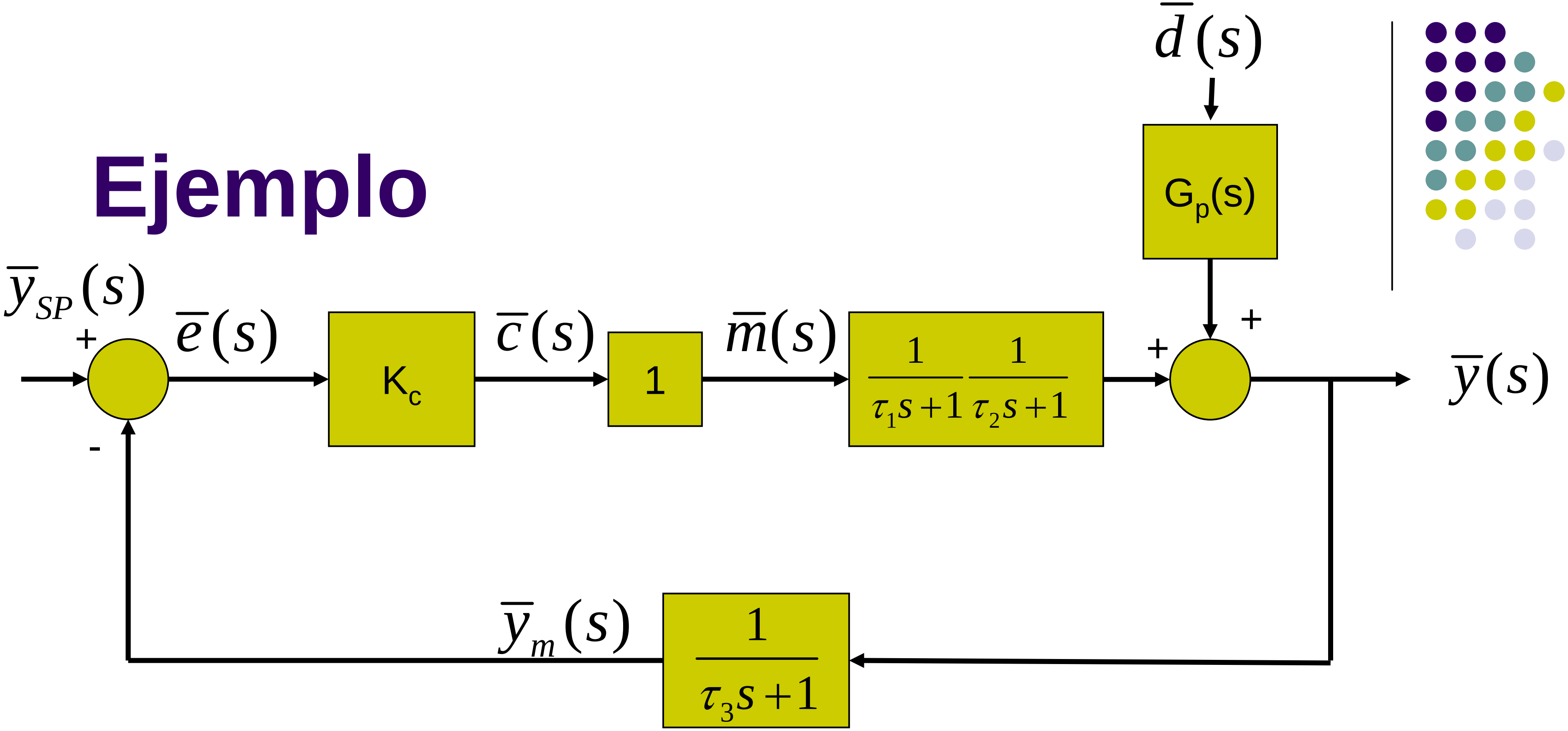
$$1+G_P G_f G_C G_m = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \ldots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

El sistema se escribe de manera que a_0 sea positivo

TEST:

1. Si hay un coeficiente negativo entonces la ecuación tiene una raíz positiva y entonces el sistema es inestable
2. Si todos los coeficientes son positivos entonces el sistema puede ser estable o inestable. Entonces aplicamos el criterio de Routh

Ejemplo



$$1+G_P G_f G_C G_m = 1+\frac{1}{\tau_1 s+1}\frac{1}{\tau_2 s+1}1K_C\frac{1}{\tau_3 s+1}=0$$

$$Si \qquad \tau_1 = 1, \qquad \tau_2 = 1/2, \qquad \tau_3 = 1/3$$

$$s^3+6s^2+11s+6\left(1+K_C\right)=0$$