IQ57A: Dinámica y control de procesos

Capitulo 7: Sistemas de segundo orden

Análisis de polos y ceros

J. Cristian Salgado H.

Propósito

Al final de esta clase usted será capaz de

- Determinar los polos y ceros de una función de transferencia
- Caracterizar la respuesta dinámica de un sistema estudiando sus polos
- Reconocer y caracterizar la respuesta dinámica de un sistema de segundo orden

Polos y ceros de la función de transferencia

La función de transferencia de la gran mayoría de los procesos se puede escribir como:

$$\frac{\overline{y}'}{\overline{f}'} = G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Excepto procesos con retardo

Def: Ceros de G(s) equivalen a las soluciones de Q(s)=0

La función de transferencia evaluada en sus ceros será igual a cero

Def: Polos de G(s) equivalen a las soluciones de P(s)=0

La función de transferencia evaluada en sus polos tenderá a infinito.

Análisis de la respuesta de un sistema

La repuesta de un sistema a una entrada también puede ser representada por el cuociente de polinomios

$$\overline{y}'(s) = G(s) \cdot \overline{f}'(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} \cdot \frac{r(s)}{q(s)}$$

Función de transferencia del proceso

Entrada (e.g. escalón, sinusoide, Impulso, etc.)

La inversión de esta expresión se puede hacer mediante fracciones parciales

Análisis de la respuesta de un sistema

En particular se puede factorizar el denominador de la siguiente manera (previo a utilizar fracciones parciales):

$$G(s)=\frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Polos de la función de transferencia

Descomposición en fracciones parciales:

$$G(s)=\frac{C_1}{(s-p_1)}+\frac{C_2}{(s-p_2)}+\left\{\frac{C_{31}}{(s-p_3)}+\frac{C_{32}}{(s-p_3)^2}+\ldots+\frac{C_{3m}}{(s-p_3)^m}\right\}+\frac{C_4}{(s-p_4)}+\frac{C_4^*}{(s-p_4^*)}+\frac{C_5}{(s-p_5)}$$

Análisis de la respuesta de un sistema

En particular se puede factorizar el denominador de la siguiente manera (previo a utilizar fracciones parciales):

$$G(s)=\frac{Q(s)}{(s-p_1)(s-p_2)(s-p_3)^m(s-p_4)(s-p_4^*)(s-p_5)}$$

Polos de la función de transferencia

Descomposición en fracciones parciales:

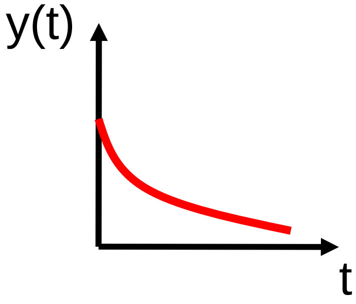
$$G(s)=\frac{C_1}{(s-p_1)}+\frac{C_2}{(s-p_2)}+\left\{\frac{C_{31}}{(s-p_3)}+\frac{C_{32}}{(s-p_3)^2}+\ldots+\frac{C_{3m}}{(s-p_3)^m}\right\}+\frac{C_4}{(s-p_4)}+\frac{C_4^*}{(s-p_4^*)}+\frac{C_5}{(s-p_5)}$$

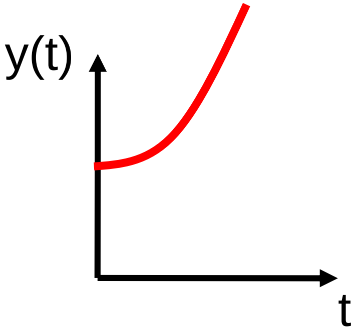
Ubicación de los polos

Caso 1: polos reales y distintos

Sea, por ejemplo $p_1<0$ y $p_2>0$, la inversión de estos términos produce:

$$\frac{C_1}{(s-p_1)} \rightarrow C_1 e^{p_1 t} \qquad \frac{C_2}{(s-p_2)} \rightarrow C_2 e^{p_2 t}$$





El signo del polo determina si la respuesta crece infinitamente o si decae a cero.

Ubicación de los polos

Caso 2: polos reales iguales

La inversión de estos términos produce:

$$\left\{\frac{C_{31}}{(s-p_3)}+\frac{C_{32}}{(s-p_3)^2}+\ldots+\frac{C_{3m}}{(s-p_3)^m}\right\}\rightarrow\left\{C_{31}+\frac{C_{32}}{1!}t+\frac{C_{33}}{2!}t^2\ldots+\frac{C_{3m-1}}{(m-1)^{m-1}}t^{m-1}\right\}e^{p_3 t}$$

$$p_3>0\xrightarrow{t\to\infty}\infty$$

$$p_3=0\xrightarrow{t\to\infty}1$$

$$p_3<0\xrightarrow{t\to\infty}0$$

Ubicación de los polos

Caso 3: polos complejos conjugados

Sea p_4 = a + bj y p_4*= a – bj, la inversión de estos términos produce:

$$\frac{C_4}{\left(s-p_4\right)}+\frac{C_4^*}{\left(s-p_4^*\right)}\rightarrow e^{at}\sin\left(bt+\phi\right)$$

$$a>0\xrightarrow{t\rightarrow\infty}\text{sistema oscila creciendo hacia el infinito}$$

$$a=0\xrightarrow{t\rightarrow\infty}\text{sistema oscila permanentemente}$$

$$a<0\xrightarrow{t\rightarrow\infty}\text{sistema oscila decayendo a cero}$$

Ubicación de los polos

Caso 4: polos en el origen

Luego $p_5 = 0$

$$\frac{C_5}{\left(s - p_5\right)} = \frac{C_5}{s} \to C_5$$

Puntos interesantes

- Notar bien que para una entrada particular además se deben considerar los polos adicionados por su denominador.
- Polos con parte real positiva dan origen a términos que crecen infinitamente en el tiempo $\rightarrow$ sistemas inestables.
- Sistemas estables serán aquellos con todos los polos en el semiplano izquierdo (parte real negativa)

Sistemas de segundo orden

Definición: Aquellos sistemas que son modelados por una ecuación diferencial de segundo orden

$$a_2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = b \cdot f'(t)$$

$$Sea \quad \tau^2 = \frac{a_2}{a_0}, \quad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0}, \quad \text{y} \quad K_P = \frac{b}{a_0} \quad a_0 \neq 0$$

$$\tau^2 \frac{d^2 y'}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy'}{dt} + y' = K_P \cdot f'(t)$$

$$\overline{y}'(s) = \frac{K_P}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1} \overline{f}'(s)$$

τ : Período de oscilación del sistema
ζ : Factor de amortiguación
Kp : Ganancia de estado estacionario

Sistemas de segundo orden

Ejemplos

- Sistemas multicapacitivos (sistemas capacitivos/ primer orden en serie)
- Sistemas inherentemente de segundo orden (raros en Ing. Química)
- Sistemas a los que se les ha adicionado un sistema de control

Dinámica de respuesta de un sistema de segundo orden

Suponga un cambio escalón en la entrada

$$\bar{f}'(s) = \frac{1}{s}$$

$$\bar{y}'(s) = \frac{K_P}{\underbrace{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau + 1}} \frac{1}{s}$$

Los polos de esta ecuación entregan una pista de la dinámica del proceso

$$p_1 = -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

$$p_2 = -\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

$$\bar{y}'(s) = \frac{K_P / \tau^2}{s\left(s - p_1\right)\left(s - p_2\right)}$$

Dinámica de respuesta de un sistema de segundo orden

Tenemos tres casos:

- Caso A: $\zeta>1$ → dos polos reales y distintos
- Caso B: $\zeta=1$ → dos polos iguales
- Caso C: $\zeta<1$ → dos polos complejos conjugados

Dinámica de respuesta de un sistema de segundo orden

Caso A: ζ>1 → dos polos reales y distintos
Sistema sobreamortiguado

$$y'(t) = K_P\left[1 - e^{-\zeta t/\tau}\left(\cosh\frac{t}{\tau}\sqrt{\zeta^2 - 1} + \frac{\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}\sinh\frac{t}{\tau}\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\right]$$

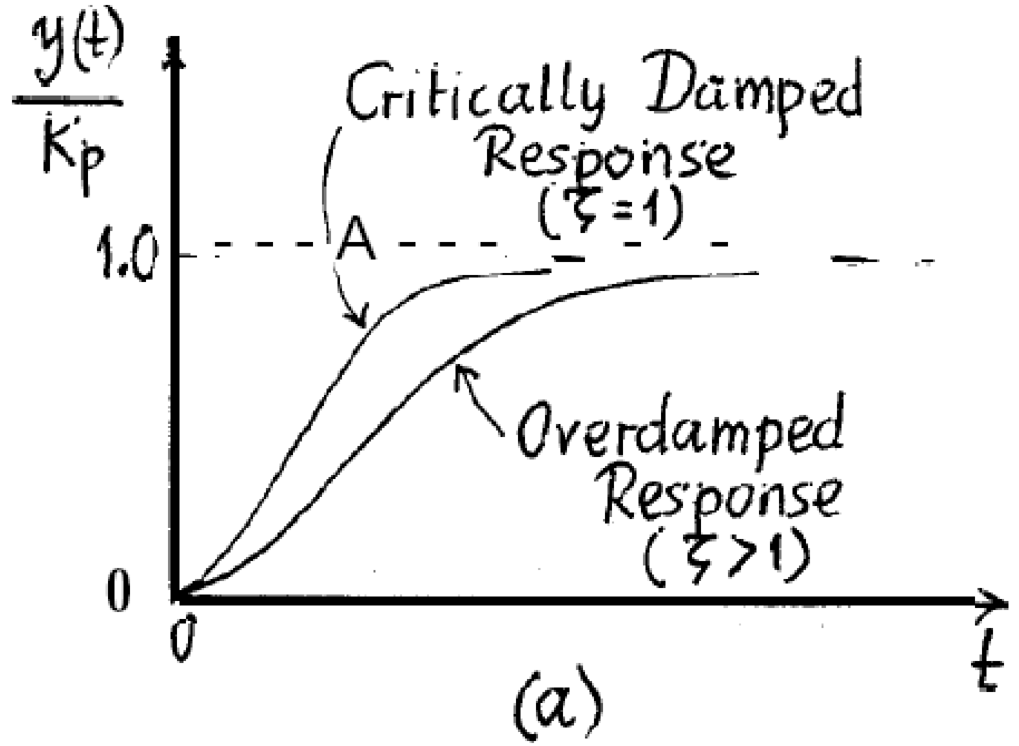
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Dinámica de respuesta de un sistema de segundo orden

Caso B: ζ=1 → dos polos iguales

Sistema críticamente amortiguado

$$y'(t) = K_P\left(1 - e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right)\right)$$



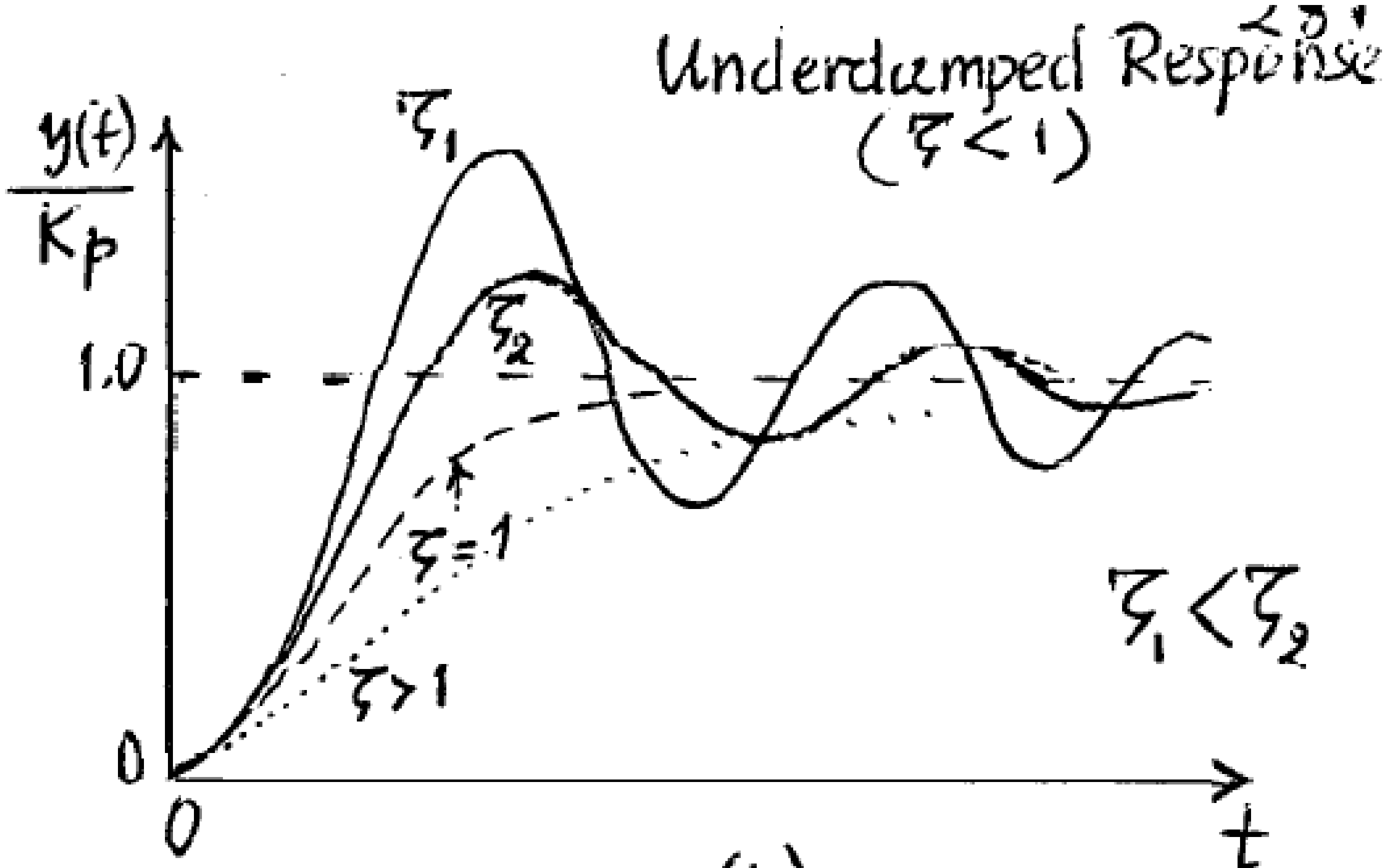
Dinámica de respuesta de un sistema de segundo orden

Caso C: $\zeta<1$ → dos polos complejos conjugados
Sistema subamortiguado

$$y'(t) = K_P \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta t/\tau} \sin\left(\omega t + \phi\right) \right]$$

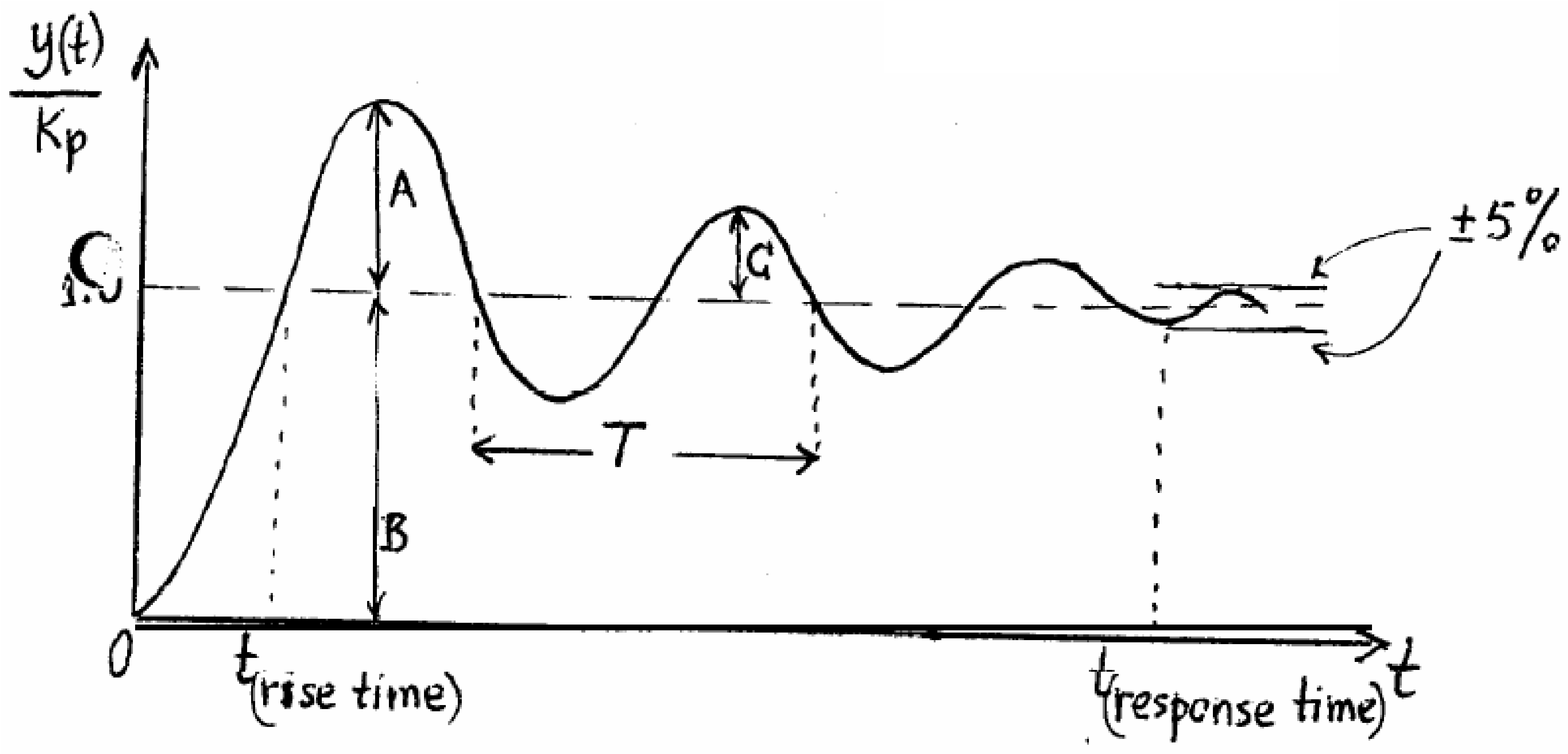
donde

$$\omega = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \qquad \text{y} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$


Underdamped Response
$(\zeta < 1)$
$\frac{y(t)}{K_p}$
ζ_1
ζ_2
1.0
$\zeta = 1$
$\zeta > 1$
$\zeta_1 < \zeta_2$
0
0
t

(b)

Características de un sistema subamortiguado



Características de un sistema subamortiguado

$$overshoot = \frac{A}{B} = \left(\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) \qquad \begin{matrix} decay \\ ratio \end{matrix} = \frac{C}{A} = \left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \right) = overshoot^2$$

$$\begin{matrix} Periodo \\ oscilación \end{matrix} = T = \frac{2\pi\tau}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \begin{matrix} Periodo \\ natural \end{matrix} = T_N = 2\pi\tau$$

Sistemas multicapacitivos

Corresponde a sistemas capacitivos (primer orden) dispuestos

Dos sistemas de primer orden en serie originan un sistema de segundo orden

- Sistemas capacitivos no interactuantes
- Sistemas capacitivos interactuantes

Sistemas capacitivos no interactuantes

N sistemas de primer orden en serie

$$\tau_{P1}\frac{dy_1'}{dt}+y_1'=K_{P1}f'(t)$$

$$\tau_{P2}\frac{dy_2'}{dt}+y_2'=K_{P2}y_1'(t)$$

$$\vdots$$

$$\tau_{Pn}\frac{dy_n'}{dt}+y_n'=K_{Pn}y_{n-1}'(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\overline{y}_1'}{\overline{f}'}=G_1(s)=\frac{K_{P1}}{\tau_{P1}s+1}$$

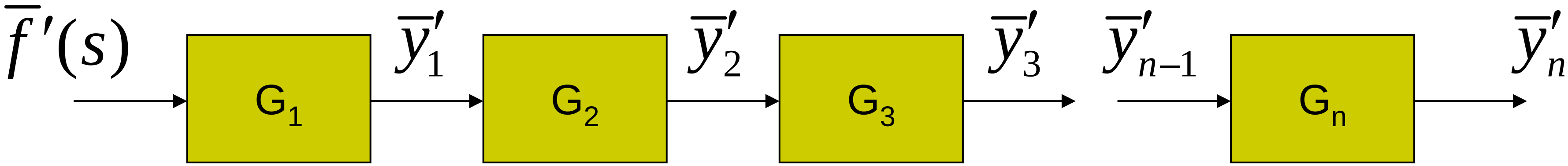
$$\frac{\overline{y}_2'}{\overline{y}_1'}=G_2(s)=\frac{K_{P2}}{\tau_{P2}s+1}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\overline{y}_n'}{\overline{y}_{n-1}'}=G_n(s)=\frac{K_{Pn}}{\tau_{Pn}s+1}$$

Sistemas capacitivos no interactuantes

N sistemas de primer orden en serie



$$\bar{y}'_n = \bar{f}' \cdot \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \bar{f}' \cdot \prod_{i=1}^{n} \frac{K_{Pi}}{\tau_{Pi} s + 1}$$

Sistemas capacitivos no interactuantes

N = 2, obtenemos un sistema de segundo orden

$$\overline{f}'(s) \longrightarrow \boxed{G_1} \xrightarrow{\overline{y}_1'} \boxed{G_2} \xrightarrow{\overline{y}_2'}$$

$$\overline{y}_n' = \overline{f}' \cdot \prod_{i=1}^{n} G_i(s) = \overline{f}' \cdot \frac{K_{P1}}{\tau_{P1}s+1}\frac{K_{P2}}{\tau_{P2}s+1}$$

¿qué características tiene este sistema?

Sistemas capacitivos interactuantes

Ejemplo, dos tanques en serie