IQ57A: Dinámica y control de procesos

Capitulo 6: Modelo de entrada salida

Función de transferencia

Modelos de primer orden

J. Cristian Salgado H.

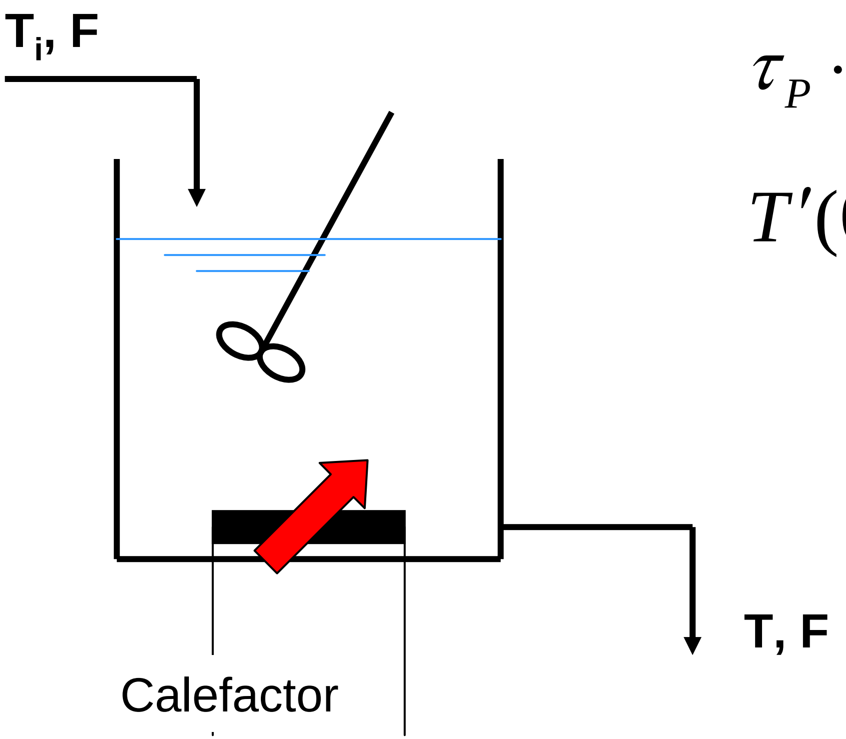
Propósito

Al final de esta clase usted será capaz de

- Obtener el modelo de entrada/salida para un proceso
- Determinar la función de transferencia de un proceso
- Obtener la respuesta dinámica de un sistema de primer orden frente a un escalón unitario de entrada

Modelo de entrada y salida

Considere un reactor CSTR donde se calienta la entrada desde Ti hasta T.



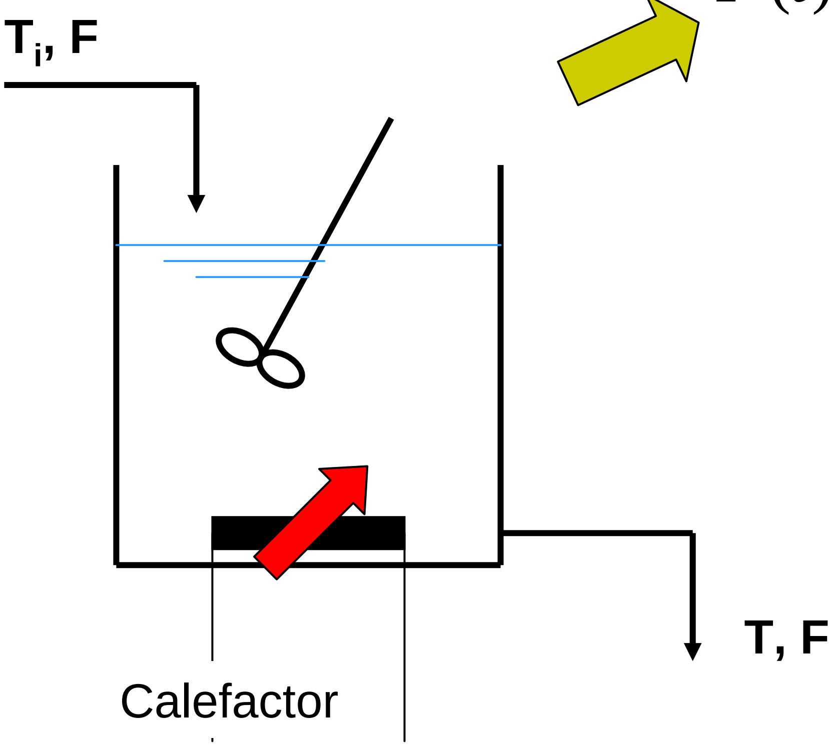
$$\tau_P \cdot \frac{dT'}{dt} + T' = K_1 \cdot T_i' + K_2 \cdot T_v'$$

$$T'(0) = 0$$

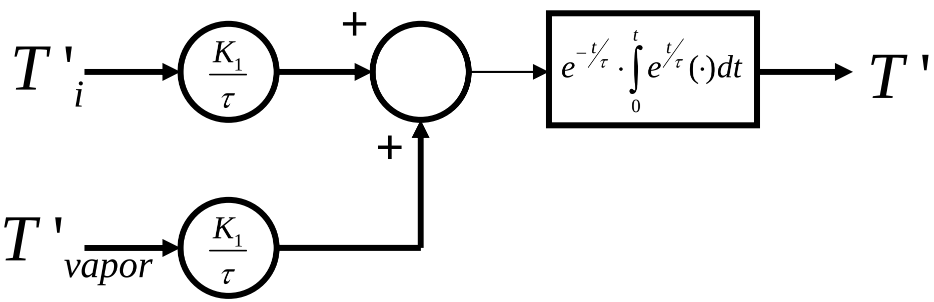
Resolver utilizando factor integrante

Modelo de entrada y salida

La variable de salida del reactor T’ es función de dos entradas T'_i y T'_{vapor}



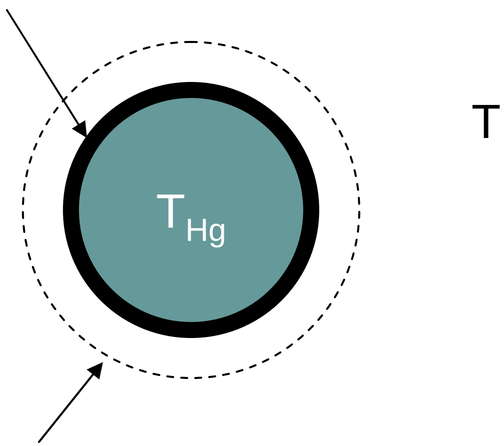
$$T'(t) = e^{-t/\tau} \cdot \int_0^t e^{t/\tau} \left(\frac{K_1}{\tau} T'_i + \frac{K_2}{\tau} T'_{vapor} \right) dt$$



Termómetro

Considere el termómetro de la figura

Vidrio



Resistencia
transferencia de calor h

Suponga:

- Resistencia a la transferencia de calor solo en el fluido
- Mercurio cambia su temperatura uniformemente
- No existen efectos de expansión ni contracción en el fluido

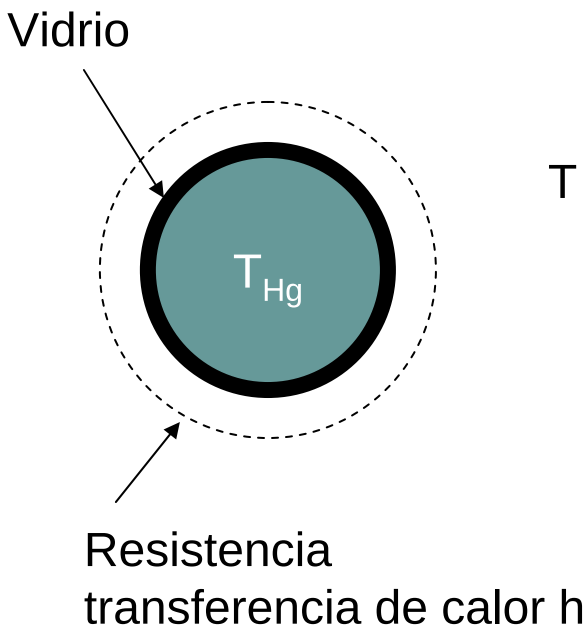
$$M_{Hg} \cdot C_{Hg} \frac{dT'_{Hg}}{dt} = hA\left(T' - T'_{Hg}\right)$$

Constante
de tiempo τ_P

$$\frac{M_{Hg} C_{Hg}}{hA} \cdot s\bar{T}'_{Hg}(s) + \bar{T}'_{Hg}(s) = T'(s)$$

Termómetro

Función de transferencia para el termómetro



$$G_{Termómetro}(s) = \frac{1}{\tau_P s + 1}$$

$$\bar{T}'_{Hg}(s) = G(s) \cdot \bar{T}'(s)$$

Función de transferencia

Definición: cuociente entre la transformada de Laplace de la salida y la entrada de un proceso

$$G(s) = \frac{Salida'(s)}{Entrada'(s)}$$

Variables desviación

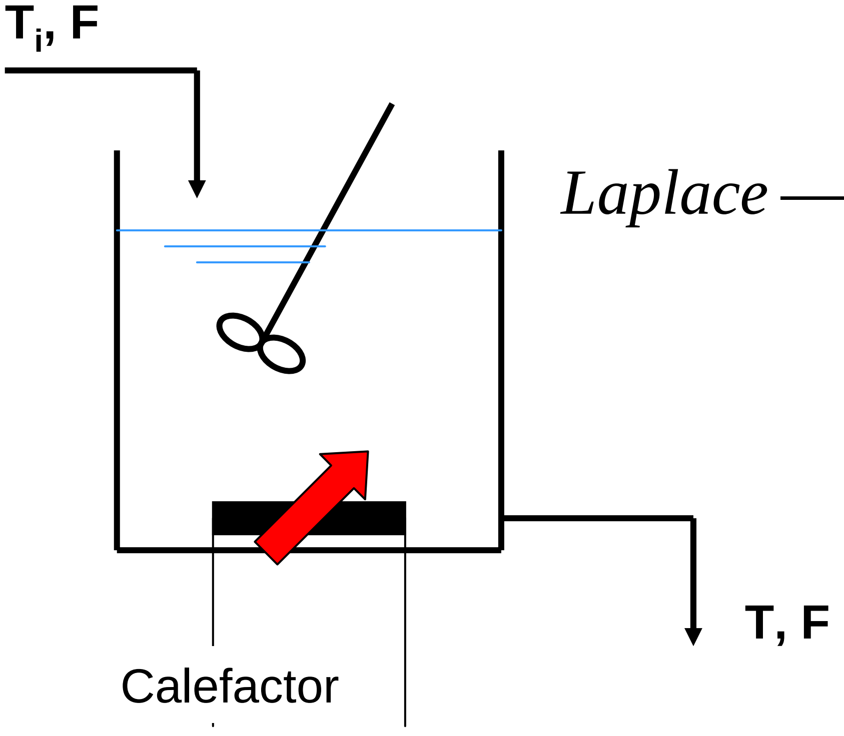
Definición: diferencia entre la variable y su estado estacionario de referencia

$$Y' = Y - Y^{est}$$

- **En el análisis de control el interés está en la desviación de las variables con respecto al estado estacionario de referencia**
- **Se evita la aparición de las constantes al aplicar Laplace sobre las derivadas**

Modelo de entrada y salida

Utilizando Laplace sobre el modelo del estanque…

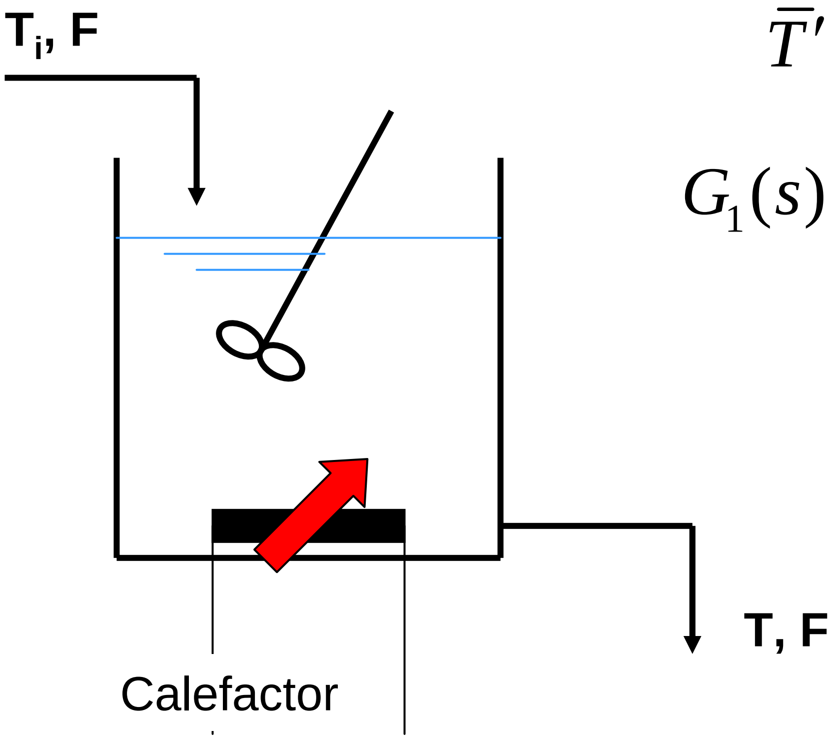


$$\tau_P \cdot \frac{dT'}{dt} + T' = K_1 \cdot T_i' + K_2 \cdot T_v'$$

$$Laplace \longrightarrow \tau_P \cdot s\bar{T}' + \bar{T}' = K_1 \cdot \bar{T}_i' + K_2 \cdot \bar{T}_v'$$

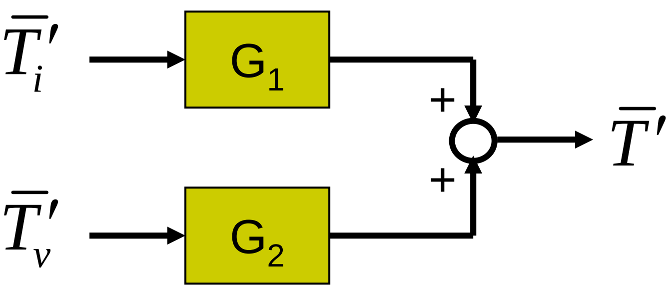
Modelo de entrada y salida

Utilizando Laplace sobre el modelo del estanque…



$$\bar{T}' = G_1(s)\cdot\bar{T}_i' + G_2(s)\cdot\bar{T}_v'$$

$$G_1(s) = \frac{K_1}{\tau_P \cdot s + 1},\quad G_2(s) = \frac{K_2}{\tau_P \cdot s + 1}$$



Propiedades de la función de transferencia

- La función de transferencia de un proceso describe su dinámica completamente. Dada una entrada:

$$y'(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(G(s)\cdot \bar{f}'(s)\right)$$

- Principio de superposición:

$$Si \quad \bar{f}'(s) = a_1 \cdot \bar{f}_1'(s) + a_2 \cdot \bar{f}_2'(s)$$

$$Entonces,$$

$$\bar{y}'(s) = G(s)\cdot \bar{f}'(s)$$

$$\bar{y}'(s) = a_1 \cdot G(s)\cdot \bar{f}_1'(s) + a_2 \cdot G(s)\cdot \bar{f}_2'(s)$$

$$\bar{y}'(s) = a_1 \cdot \bar{y}_1'(s) + a_2 \cdot \bar{y}_2'(s)$$

Considere un proceso con una entrada y una salida modelado por la siguiente ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y'}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y'}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} y'}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = b \cdot f'(t)$$

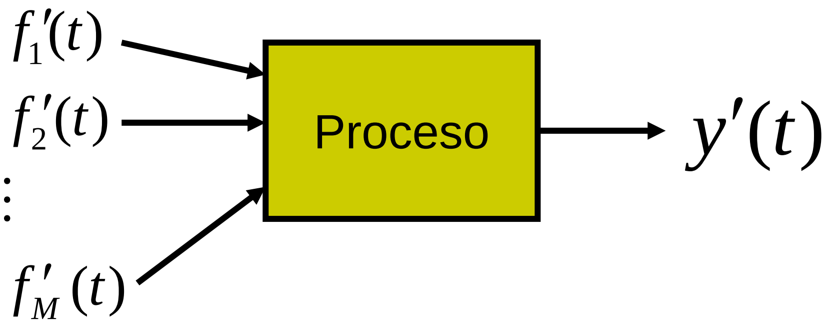
$$f'(t) \longrightarrow \boxed{\text{Proceso}} \longrightarrow y'(t)$$

Tomando Laplace y reordenando

$$\frac{\overline{y}'(s)}{\overline{f}'(s)} = \frac{b}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0} = G(s)$$

Considere un proceso con M entradas y una salida modelado por la siguiente ecuación diferencial

$$a_n \frac{d^n y'}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y'}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2} y'}{dt^{n-2}} + \ldots + a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = \sum_{i=1}^{M} b_i \cdot f_i'(t)$$



Tomando Laplace y reordenando

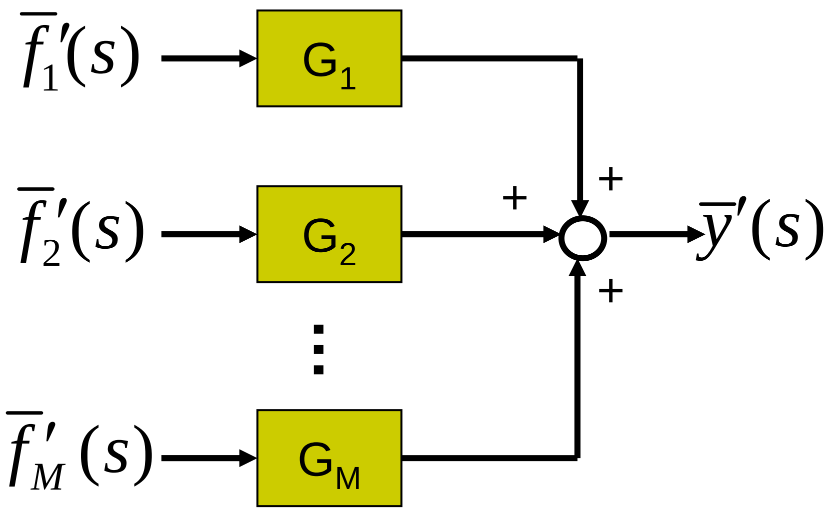
$$sea \quad P(s) = a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \ldots + a_1 s + a_0$$

$$\bar{y}'(s) = \sum_{i=1}^{M} \frac{b_i}{P(s)} \bar{f}_i'(s)$$

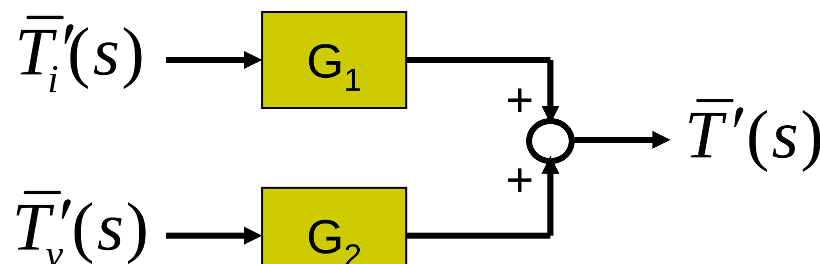
$$\bar{y}'(s) = \sum_{i=1}^{M} G_i(s)\,\bar{f}_i'(s), \quad con \quad G_i(s) = \frac{b_i}{P(s)}$$

Función de transferencia entre la salida y la entrada i

El diagrama de bloques sería:



Ejemplo para M=2:



Para el caso de múltiples salidas (N) y entradas (M). Por ejemplo M=N=2

$$\frac{dy_1'}{dt} + a_{11} y_1' + a_{12} y_2' = b_{11} f_1'(t) + b_{12} f_2'(t)$$

$$\frac{dy_2'}{dt} + a_{21} y_1' + a_{22} y_2' = b_{21} f_1'(t) + b_{22} f_2'(t)$$

Tomando Laplace y reordenando

$$\overline{y}_1'(s) = G_{11}(s) \cdot \overline{f}_1'(s) + G_{12}(s) \cdot \overline{f}_2'(s)$$

$$\overline{y}_2'(s) = G_{21}(s) \cdot \overline{f}_1'(s) + G_{22}(s) \cdot \overline{f}_2'(s)$$

$$con$$

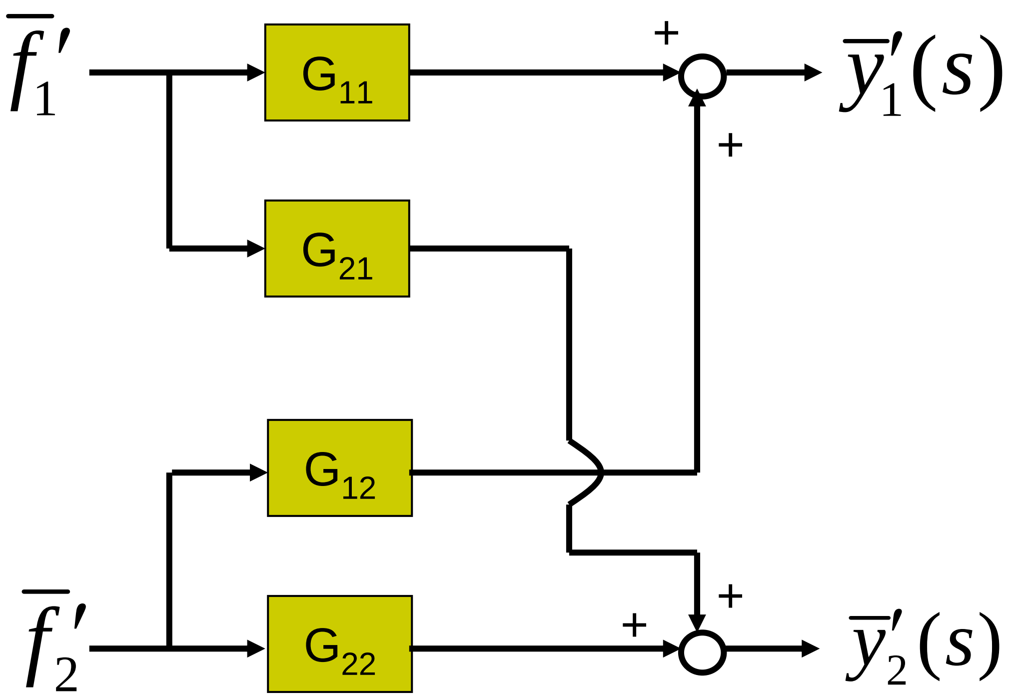
$$G_{11}(s) = \frac{b_{11}s + \left(a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11}\right)}{P(s)}, G_{12}(s) = \frac{b_{12}s + \left(a_{12}b_{22} - a_{22}b_{12}\right)}{P(s)}$$

$$G_{21}(s) = \frac{b_{21}s + \left(a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21}\right)}{P(s)}, G_{22}(s) = \frac{b_{22}s + \left(a_{21}b_{12} - a_{11}b_{22}\right)}{P(s)}$$

$$\bar{y}_1'(s) = G_{11}(s)\cdot \bar{f}_1'(s) + G_{12}(s)\cdot \bar{f}_2'(s)$$

$$\bar{y}_2'(s) = G_{21}(s)\cdot \bar{f}_1'(s) + G_{22}(s)\cdot \bar{f}_2'(s)$$

El diagrama de bloques sería:



Para un sistema con 3 entradas y dos salidas

$$\overline{y}_1'(s) = G_{11}(s)\cdot \overline{f}_1'(s) + G_{12}(s)\cdot \overline{f}_2'(s) + G_{13}(s)\cdot \overline{f}_3'(s)$$
$$\overline{y}_2'(s) = G_{21}(s)\cdot \overline{f}_1'(s) + G_{22}(s)\cdot \overline{f}_2'(s) + G_{23}(s)\cdot \overline{f}_3'(s)$$

En notación matricial

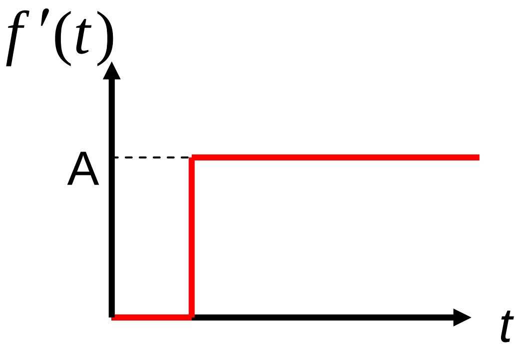
$$\begin{bmatrix} \overline{y}_1'(s) \\ \overline{y}_2'(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{f}_1'(s) \\ \overline{f}_2'(s) \\ \overline{f}_3'(s) \end{bmatrix}$$

En general para un sistema de M entradas y N salidas

$$\begin{bmatrix} \overline{y}_1'(s) \\ \overline{y}_2'(s) \\ \vdots \\ \overline{y}_N'(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1M} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2M} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & G_{N2} & \cdots & G_{NM} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \overline{f}_1'(s) \\ \overline{f}_2'(s) \\ \vdots \\ \overline{f}_M'(s) \end{bmatrix}$$

Funciones de entrada

Función escalón

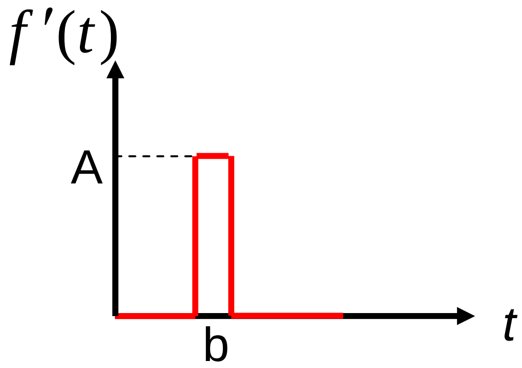


$$f'(t) = A \cdot u(t)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}'(s) = \frac{A}{s}$$

Función escalón



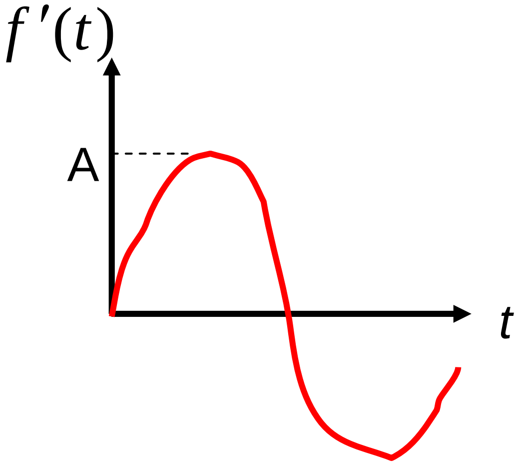
$$f'(t) = A \cdot \delta(t)$$

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 & \\ A/b & 0 \leq t \leq b & b \to 0 \\ & t & \end{cases}$$

$$\bar{f}'(s) = A$$

Funciones de entrada

Función sinusoidal



$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A\sin \omega t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\overline{f}'(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Sistemas de primer orden

Definición: Aquellos sistemas que son modelados por una ecuación diferencial de primer orden

$$a_1 \frac{dy'}{dt} + a_0 y' = b \cdot f'(t)$$

$$Sea \quad \tau_P = \frac{a_1}{a_0} \quad \text{y} \quad \mathrm{K}_P = \frac{b}{a_0}, \qquad a_0 \neq 0$$

$$\bar{y}'(s) = \frac{K_P}{\tau_P s + 1} \bar{f}'(s)$$

Sistemas de primer orden

Si a_0=0 entonces sistema capacitivo puro

$$\frac{dy'}{dt} = K_P \cdot f'(t)$$

$$G(s) = \frac{K_P}{s}$$

Ejemplo: tanque de nivel con bomba en la salida

Respuesta de un sistema de primer orden

Respuesta a un escalón unitario en la entrada