

RESUMEN TEORÍA DE COLAS

Preguntas Frecuentes

¿Qué son las tasas efectiva de vida y muerte?

La tasa efectiva de nacimiento en un proceso de nacimiento y muerte está dada por $\sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i \pi_i$ donde λ_i es la tasa de nacimiento del estado i . Es algo como el promedio ponderado (por la probabilidad de encontrarnos en ese estado) de la tasa de nacimiento en el largo plazo.

Es análogo para la tasa efectiva de muerte.

¿Por Qué en régimen estacionario la tasa efectiva de salida es igual a la de entrada?

Un tema que siempre provoca confusión es por que en régimen estacionario la tasa de entrada, típicamente llamada λ , es igual a la tasa efectiva de salida e independiente tanto de la tasa de procesamiento de cada servidor μ como del número de servidores.

Si nosotros asumimos régimen estacionario, estamos diciendo que el sistema no puede *explotar* o que el número de personas en la cola diverja. Supongamos que la tasa efectiva de salida fuese mayor estricta que la de entrada. En este caso estaría entrando más de lo que sale, lo que es absurdo, pues eso querría decir que el sistema genera personas.

Por otro lado si la tasa de salida es menor que la de entrada con probabilidad 1 el sistema se iría a infinito. Luego concluimos que la tasa efectiva de salida debe ser exactamente igual a la tasa efectiva de entrada si suponemos régimen permanente.

¿Por Qué en régimen estacionario la tasa efectiva de salida es independiente de las tasas de procesamiento por servidor y de el número de estos?

Intuitivamente la tasa efectiva de salida debe ser menor a $c\mu$ pues esta sería la tasa si es que siempre estuviese el sistema de servidores repleto. Nosotros sabemos que existe una probabilidad mayor estricta de cero de no encontrar al sistema en este estado en el largo plazo, luego en la tasa efectiva aparecerá un término menor ponderado por una cantidad positiva.

Uno podría pensar que debiese haber una relación entre estas tasas y la verdad es que no la hay pues formalmente al hacer el cálculo si imponemos régimen estacionario, los términos asociados a c y μ se irán.

Ojo que al imponer régimen estacionario se esta diciendo que $\lambda < c\mu$ pero esta imposición no indica que λ deba ser función de $c\mu$ pues estos parámetros son constantes.

Ley de Little

En un sistema que opera *FCFS* (first-come-first-served), independiente de las distribuciones de llegada y salida (he aquí el poder de esta ley).

$$L = \lambda T \tag{1}$$

Donde L es la cantidad esperada de personas en el sistema, λ la tasa efectiva de entrada y T el tiempo esperado que tardan en entrar y salir de éste.

Es importante recalcar que esta ley se aplica a cualquier sistema, independiente de sus fronteras, por ejemplo si tenemos un sistema con una cola y un conjunto de servidores podemos aplicar Little en el subsistema colas, en el subsistema servidores o en el sistema como un todo ¹(ver un sistema típico como el de la figura 1).

Acá se tendrá lo siguiente L , número esperado de personas en el sistema completo, L_q número esperado en la cola y r número esperado en los servidores se relacionan según $L = L_q + r$

Colas M/M/C

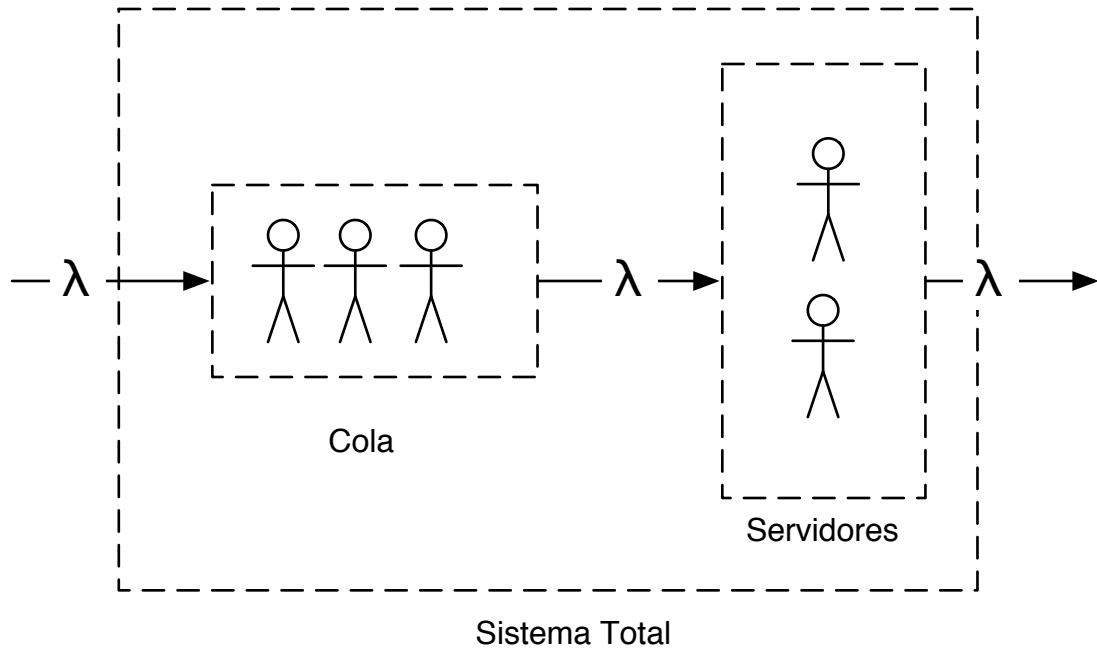


Figura 1: Sistemá típico de colas. Se puede aplicar Little a cada uno de los subsistemas

Con λ la tasa efectiva de entrada, μ , la tasa de procesamiento *por servidor* y c el número de servidores.

r representa la cantidad promedio *en atención* en los c servidores y ρ representa la cantidad promedio *por servidor*.

$$r = \frac{\lambda}{\mu} \quad (2)$$

$$\rho = \frac{r}{c} \quad (3)$$

Este resultado se puede deducir de aplicar Little a los servidores del sistema. La tasa efectiva de entrada λ a este subsistema será la misma que la tasa efectiva de entrada a la cola o al sistema total (ver 1) y el tiempo esperado en este subsistema será $T = 1/\mu$ pues a tasa μ se servirá a la persona.

Suponiendo régimen estacionario.

¹también se puede aplicar a una red de colas

$$\pi_n = \frac{(c\rho)^n}{n!} \pi_0 \quad n = 0..c \quad (4)$$

$$\pi_{c+n} = \rho^n \pi_c \quad n = c + 1..\infty \quad (5)$$

$$\pi_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^n}{n!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} \quad (6)$$

Definiendo π_w como la fracción de tiempo en que si llegamos al sistema tendremos que esperar.

$$\alpha_w = \sum_{i=c}^{\infty} \pi_i = \frac{\pi_c}{1-\rho} \quad (7)$$

El número esperado de personas en la cola L_q y el tiempo que tardan en esta W_q estará dado por:

$$E(L_q) = \alpha_w \frac{\rho}{1-\rho} \quad (8)$$

$$E(W_q) = \frac{\alpha_w}{(1-\rho)(c\mu)} \quad (9)$$

Francisco Uribe
fruribe@dcc.uchile.cl