Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN79O: Modelos Estocásticos en Sistemas de Ingeniería
Profesor: Raúl Gouet
Auxiliar: Felipe Castro, Francisco Uribe

Clase Auxiliar 11
Movimiento Browniano, 7 de Noviembre de 2007

Problema 1, Control 3 Primavera 2003

1. (1.0 pts.) Para cualquier $\theta > 0$ de define el proceso escalado $\{X_t,\, t \geq 0\}$

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{\theta}} B_{\theta t}$$

donde $\{B_t, t \geq 0\}$ denota un movimiento Browniano estándar. Muestre que X_t es un movimiento Browniano estándar.

Para las siguientes partes considere $\tau_a = \text{ínf}\{t : B_t = a\}$.

2. (3.0 pts.) Considere la función $f(a, \lambda) = E[\exp(-\lambda \tau_a)]$

   a) Encuentre una ecuación diferencial para $f(a, \lambda)$.

   b) Encuentre una relación entre $f(a, \lambda)$, $f(b, \lambda)$ y $f(a + b, \lambda)$. Para esto relacione τ_{a+b} con $\tau_a + \tau_b$.

   c) Encuentre una relación entre $f(ab, \lambda)$ y $f(a, b^2\lambda)$. Para esto relacione τ_{ab} con $b^2\tau_a$ utilizando la parte 1.

   d) Muestre que

   $$f(a, \lambda) = \exp(c \cdot a\sqrt{\lambda})$$

   Encuentre el valor de c.

3. (1.0 pts.) Muestre que, para cualquier valor real a se tiene que

$$E[\exp(-\lambda \tau_a)] = \exp(-|a|\sqrt{2\lambda})$$

Para esto, resuelva considerando $a \geq 0$ y utilice el proceso $M_t = \exp(\rho B_t - \frac{1}{2}\rho^2 t)$. Concluya.

NOTA: Considere que $P(\tau_a \leq \infty) = 1$.

4. (1.0 pts.) Muestre que

$$E[\tau_a^{-1}] = \frac{1}{a^2}$$

NOTA: Considere que

$$t^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\lambda$$

Problema 2

Armijo Catalán está a cargo de mantener el correcto funcionamiento de un complejo proceso productivo. Para esto es su deber vigilar la temperatura interna de la principal caldera del complejo industrial.

En su estación de trabajo Armijo posee una pantalla que despliega, de forma continua, información acerca de la temperatura al interior de la Caldera. La temperatura (entregada en grados $Kelvin$ ($K°$)) puede ser modelada como un Movimiento Browniano con un Drift $\mu > 0$ (suponga que en el rango de operación de la maquina es altamente improvable que la temperatura llegue a los -273 [$K°$]).

La misión de Armijo es sumamente simple: Debe cuidar que la temperatura se encuentre, todo el tiempo, bajo los $B[K°](B > 0)$. Si en algún instante del tiempo la temperatura alcanza esta cantidad se produce el colapso del sistema productivo. Esto significa un alto costo para la empresa (específicamente, se incurre en un costo de $\$M$). Además el proceso productivo solo puede ser reiniciado luego de un tiempo aleatorio de reparación de distribución exponencial de media $\frac{1}{\mu}$[horas].

Para lograr esto Armijo cuenta con un botón de pánico que es capaz de hacer bajar (instantáneamente) la temperatura de la caldera a $0[K°]$. Sin embargo cada vez que se oprime este botón existe una probabilidad $\alpha(x) = (1 - e^{-|x|})$ de que se desplome el sistema (también inmediatamente), donde x es la temperatura de la caldera al instante de apretar el botón. Adicionalmente se sabe que cada vez que se presiona el botón, se incurre en un costo de $C\$$ (independiente de si el sistema colapsa o no).

Armijo está interesado en encontrar una política de acción que le permita minimizar el **gasto esperado del proceso productivo por unidad de tiempo**. Para lograr esto responda:

1. Describa cuál es el tipo de política de acción que debería seguir Armijo. Tiene sentido una política donde el botón se apreta cuando la temperatura de la caldera es negativa?.
2. Sea $f(x)$ el tiempo (esperado) que demora la temperatura del sistema en alcanzar los $x[K°]$. Derive una ecuación diferencial para $f(x)$. Resuélvala apoyándose en la relación existente entre $f(x + y)$, $f(x)$ y $f(y)$
3. ¿Cuál es el costo de la política "no actuar sobre el sistema"?.
4. ¿Cuál es el costo de la política de apretar el botón cuando se alcanza una temperatura de $X[K°]$?.
5. ¿Cuál es la política óptima que debe seguir Armijo? Explique su metodología de cálculo.

Problema 3

Sea $\{Z(t), t \geq 0\}$ un puente Browniano. Muestre que si

$$X(t) = (t + 1)Z(\frac{t}{t + 1})$$

entonces $\{X(t), t \geq 0\}$ es un movimiento Browniano estándar.